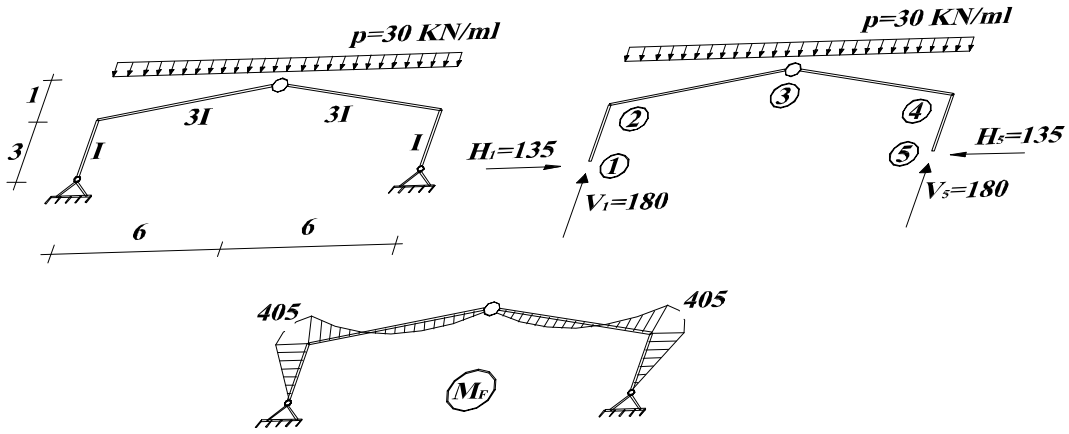
LIVIA GABOR
EMIL ALBOTĂ
MELANIA ZANFIR
RUXANDRA ENACHE

STATICA CONSTRUCȚIILOR

APLICAȚII



CONSPRESS **BUCUREŞTI**

2003

LIVIA GABOR
EMIL ALBOTĂ
MELANIA ZANFIR
RUXANDRA ENACHE

STATICA CONSTRUCȚIILOR

APLICAȚII

CONSPRESS **BUCUREŞTI**

2003

Referent ştiinţific:

prof. univ. dr. ing. Florin MACAVEI

Redactor responsabil şi consilier editorial:

Vasile TĂMÂIAN

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Statica Construcţiilor: aplicaţii / Livia Gabor, Emil Albotă, Melania Zanfir, Ruxandra Enache. – Bucureşti: Conspress, 2003
Bibliogr.
ISBN 973-8165-35-0

I. Gabor, Livia
II. Albotă, Emil
III. Zanfir Melania
IV. Enache, Ruxandra

624.041

Colecţia Tehnică

CONSPRESS

B-dul Lacul Tei nr. 124, sector 2, Bucureşti
Tel: (021) 2422719 int 183 e-mail: vtama@hidro.utcb.ro

PARTEA I.
STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Structurile static determinate sunt structurile care pot fi rezolvate cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static (dacă forțele se raportează la poziția inițială, nedeformată).

Structurile rezolvate în culegerea de față au comportare liniar elastică ceea ce corespunde modelului geometric liniar, respectiv fizic liniar. Pornind de la ideea că schema de calcul reprezintă rezultatul modelării structurii reale, prin modelul geometric liniar, respectiv fizic liniar, se înțelege acceptarea următoarelor ipoteze:

MODELUL GEOMETRIC LINIAR ⇨

- **Ipoteza micilor deplasări**.

⇩

- **Exprimarea echilibrului față de poziția inițială, nedeformată.**

⇩

- **Reducerea barelor structurii la axele lor geometrice.**

MODELUL FIZIC LINIAR ⇨

- **Material perfect elastic, omogen continuu şi izotrop.**

⇩

- **Solicitare până la limita de proporționalitate.**

⇩

- **Legătură liniară între tensiuni şi deformații specifice (Legea lui Hooke).**

La structurile cu comportare liniar elastică se pot aplica cele două principii care rezultă ca o consecință a acceptării modelelor mai sus menționate :

- **principiul superpoziției liniare** şi
- **principiul proporționalității dintre acțiune şi răspuns.**

Menționăm de asemenea că rezolvările se limitează la structuri plane formate din bare drepte acționate în planul lor. Convențiile de semne pentru eforturile secționale ca şi convențiile de reprezentare ale diagramelor de eforturi rămân neschimbate față de Rezistența Materialelor. Astfel eforturile secționale pozitive sunt considerate acele eforturi care deformează în sensul lor elementul de bară de lungime **dx** (Fig. a).

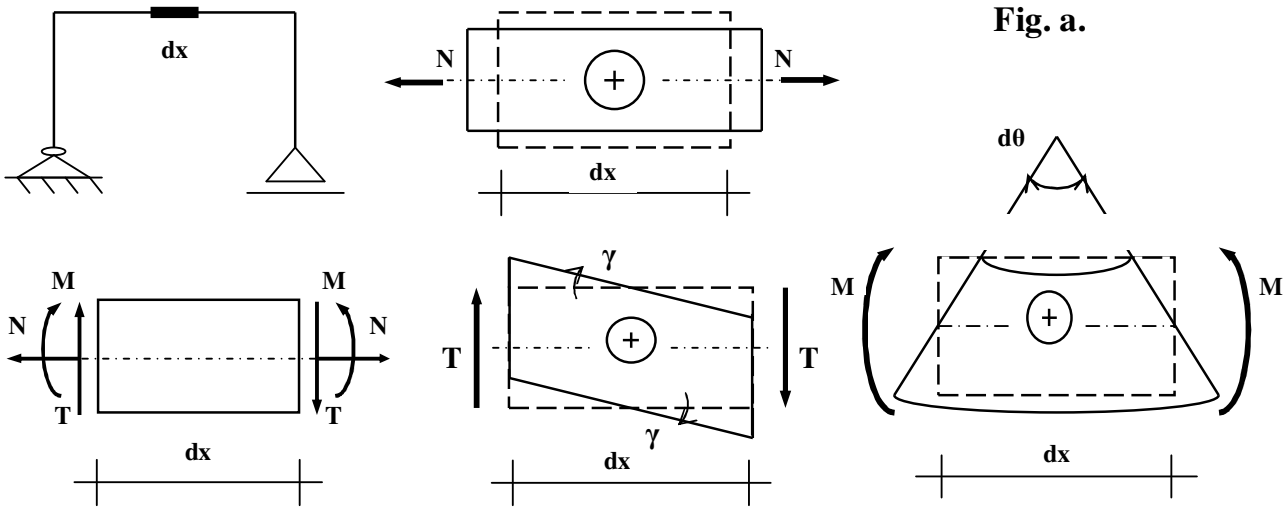


Fig. a.

Convenția de semne pentru eforturile secționale:

- Forța axială pozitivă întinde elementul de bară.
- Forța tăietoare pozitivă formeaza un cuplu orar (unghiul γ de deformare este orar).
- Momentul încovoietor pozitiv întinde fibra de jos a elementului de bară.

Diagramele eforturilor secționale se reprezintă față de o axa de referință, de obicei axa barei. Astfel avem:

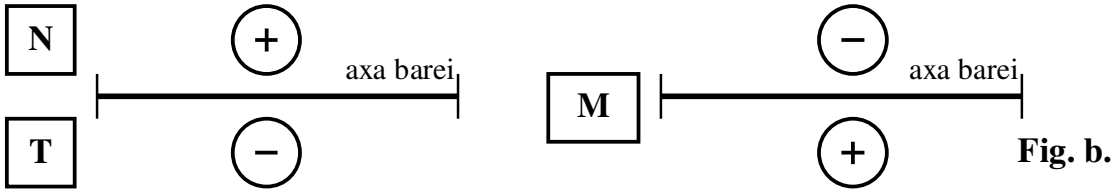


Fig. b.

Pentru trasarea rapidă şi corectă a diagramelor de eforturi se alege pe fiecare bară a structurii un sens de parcurgere, reprezentat dedesubt şi care va stabili noțiunile:

- sus, jos.
- stânga ST şi DR dreapta.

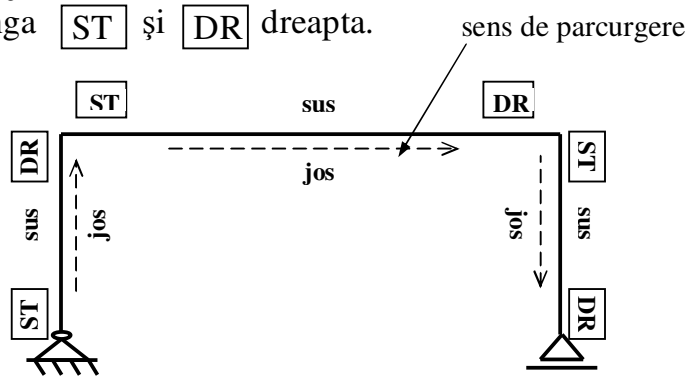


Fig. c.

CAPITOLUL 1
GRINDA SIMPLU REZEMATĂ

APLICAȚIA 1

Pentru grinda simplu rezemată de mai jos (Fig. 1.1) se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T, M.

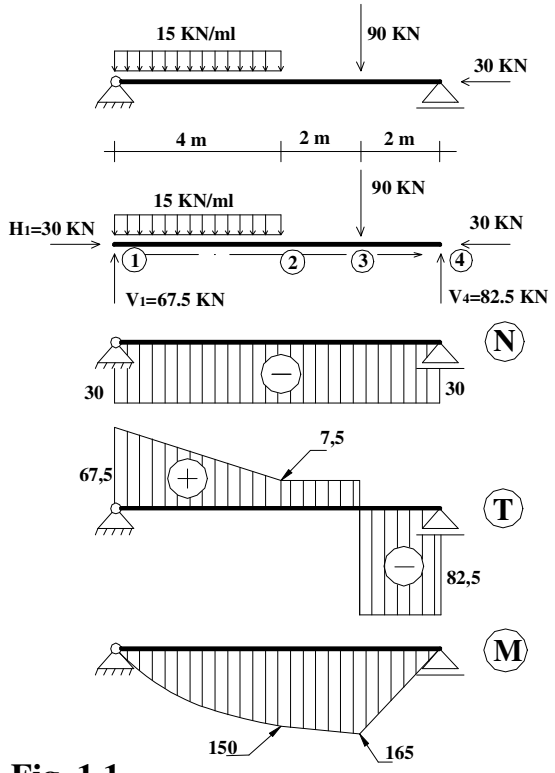


Fig. 1.1

a. Calculul reacțiunilor

Se elimină legăturile şi se propun reacțiunile ca sens în articulația 1 si reazemul simplu 4.

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_1$$

$$H_1 - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$H_1 = 30KN$$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_1;$$

$$V_1 \times 8 - 15 \times 4 \times 6 - 90 \times 2 = 0$$

$$V_1 = 67{,}5KN;$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_4;$$

$$-V_4 \times 8 + 15 \times 4 \times 2 + 90 \times 6 = 0$$

$$V_4 = 82{,}5KN;$$

Verificarea rezultatelor

$$\sum Y_i = 67{,}5 + 82{,}5 - 15 \times 4 - 90 = 0$$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Pentru stabilirea noțiunilor de ST, DR, SUS si JOS pe grindă s-a ales sensul de parcurgere de la secțiunea 1 spre secțiunea 4.

- **Diagrama forțelor axiale N**

Pe bara 1-4 efortul axial este constant. Acesta reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor de la ST sau DR secțiunii după direcția axei barei.

$$N_{1-4} = N_{4-1} = -H_1 = -30KN$$

Valoarea negativă se reprezintă pe bară JOS.

- **Diagrama forțelor tăietoare T**

Pe porțiunea de bară 1-2 forța tăietoare este liniară. Forța tăietoare dintr-o secțiune ***i*** reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor de la ST sau DR secțiunii după direcția perpendiculară pe axa barei. Rezultă valorile:

$T_{1\text{-}2} = -V_1 = 67{,}5\ KN$; $T_{2\text{-}1} = T_{1\text{-}2} - 15 \times 4 = 67{,}5 - 60 = 7{,}5\ KN$.

Pe porțiunea de bară 1-2, respectiv 3-4 forța tăietoare este constantă, având un salt pe direcția şi de mărimea forței concentrate din secțiunea 3:

$$T_{2-3} = T_{3-2} = +7{,}5KN;$$

$$T_{3-4} = T_{4-3} = +7{,}5 - 90 = -82{,}5KN;$$

Valorile pozitive ale forței tăietoare se reprezintă SUS.

- **Diagrama momentelor încovoietoare M.**

Pe porțiunea de bară 1-2 diagrama momentului încovoietor este parabolică. Momentul încovoietor dintr-o secțiune ***i*** reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de la ST sau DR secțiunii în raport cu centrul de greutate al acesteia. Rezultă valorile:

$$M_{1-2} = 0; \qquad M_{2-1} = 67{,}5 \times 4 - 15 \times 4 \times 2 = 150KNm.$$

Pe porțiunea de bară 2-4, diagrama momentului încovoietor este liniară cu vârf în sensul forței concentrate din secțiunea 3:

$$M_{3-4} = -(-V_4 \times 2) = +82{,}5 \times 2 = 165KNm;$$ (au fost reduse forțele de la DR secțiunii).

Valorile pozitive ale momentului încovoietor se reprezintă JOS.

APLICAȚIA 2

Pentru grinda simplu rezemată cu consolă de mai jos (Fig. 1.2.) se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T, M.

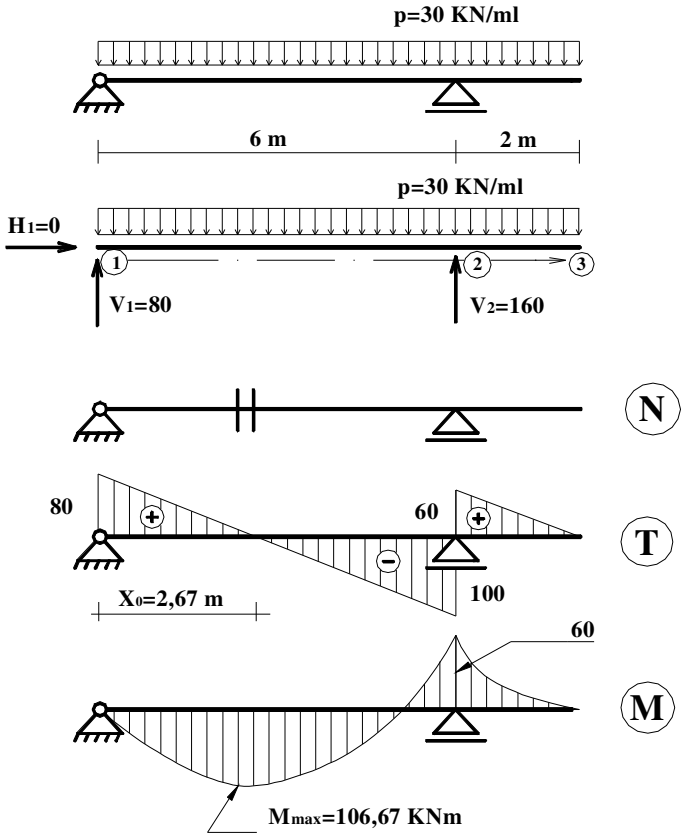


Fig. 1.2.

a. Calculul reacțiunilor.

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_1 = 0;$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow V_1;$$

$$V_1 \times 6 - 30 \times 8 \times 2 = 0$$

$$V_1 = 80KN;$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_2;$$

$$-V_2 \times 6 + 30 \times 8 \times 4 = 0;$$

$$V_2 = 160KN;$$

Verificarea rezultatelor

$$\sum Y_i = 80 + 160 - 30 \times 8 = 0;$$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

- **Diagrama forțelor axiale N**

Nu avem forțe orizontale pe grindă, deci forța axială este nulă.

- **Diagrama forțelor tăietoare T.**

Pe porțiunea de bară 1-2 forța tăietoare este liniară:

$$T_{1-2} = +V_1 = +80KN; \qquad T_{2-1} = T_{1-2} - 30\times 6 = 80 - 180 = -100KN;$$

Se observă că diagrama are un punct de anulare la distanța x_0 fața de secțiunea 1. În această secțiune vom avea o valoare maximă a momentului încovoietor:

$$T_{x_o} = 0 = V_1 - 30x_0 = 80 - 30x_0 \Rightarrow x_0 = 2{,}67m.$$

Pe porțiunea 2-3 forța tăietoare este liniară (încărcarea exterioară fiind uniform distribuită).

$$T_{2-3} = T_{2-1} - V_2 = -100 + 160 = +60KN; \qquad T_{3-2} = 0; \text{ sau}$$

$$T_{2-3} = +30\times 2 = +60KN; \text{ (forțele au fost reduse în raport cu secțiunea de la DR acesteia).}$$

- **Diagrama momentelor încovoietoare M.**

Pe porțiunile de bară 1-2 respectiv 2-3, forța tăietoare fiind liniară, momentul încovoietor rezultă parabolic, cu un vârf în sensul reacțiunii V_2:

$$M_{1-2} = 0; \qquad M_{2-1} = 80\times 6 - 30\times 6\times 3 = -60KNm;$$

$$M_{\max} = V_1 \times x_0 - p\times x_0 \times \frac{x_0}{2} = 80\times 2{,}67 - 30\times 2.67\times \frac{2{,}67}{2} = 106{,}67KNm;$$

$$M_{2-3} = -(30\times 2\times 1) = -60KNm; \qquad M_{3-2} = 0KNm;$$

Observație:

Sensul de parcurgere, ales arbitrar pe bară, nu are nici un rol în calculul reacțiunilor. Acest sens stabileşte noțiunile de ST, DR, SUS şi JOS pe bară, utile în calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

APLICAȚIA 3

Pentru grinda simplu rezemată de mai jos (Fig 1.3.) se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor N, T, M.

Se observă că grinda este înclinată fată de orizontală cu unghiul α. Pentru simplificarea explicațiilor vom rezolva în paralel grinda dreaptă asociată grinzii înclinate şi vom comenta rezultatele obținute. Prin grinda dreaptă asociată grinzii înclinate se înțelege proiecția acesteia pe orizontală, încărcarea exterioară rămânând aceeaşi.

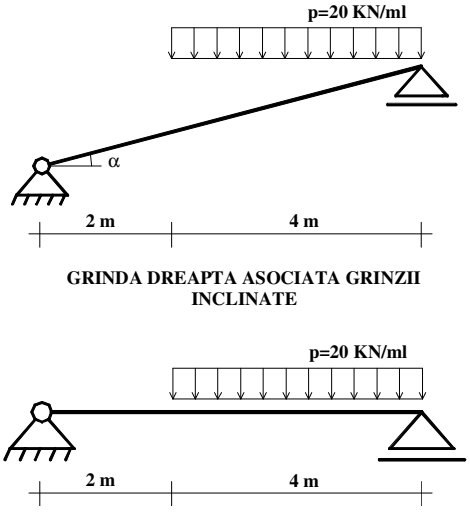


Fig 1.3.

Rezolvarea grinzii drepte asociate grinzii înclinate (Fig. 1.4.).

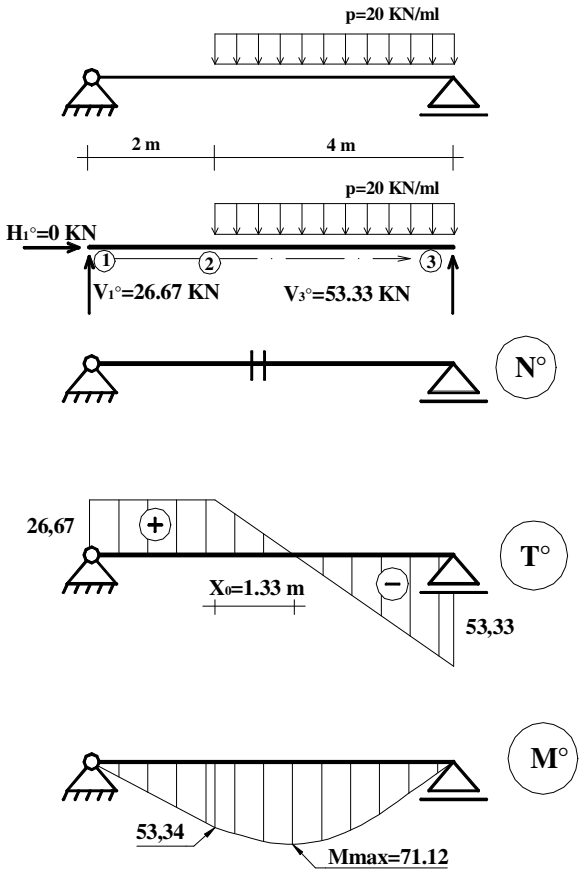


Fig. 1.4.

a. Calculul reacțiunilor R_0.

$\sum X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1^{\,0} = 0;$

$(\sum M)_3 = 0; \ \Rightarrow \ V_1^{\,0};$

$V_1^{\,0} \times 6 - 20 \times 4 \times 2 = 0; \ \ V_1^{\,0} = 26{,}67KN;$

$(\sum M)_1 = 0; \ \Rightarrow \ V_3^{\,0};$

$-V_3^{\,0} \times 6 + 20 \times 4 \times 4 = 0; \ V_3^{\,0} = 53{,}33KN;$

Verificarea rezultatelor

$\sum Y_i = 26{,}67 + 53{,}33 - 20 \times 4 \equiv 0;$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

- **Diagrama N^0.**

Nu avem pe bară forțe orizontale deci efortul axial va fi nul.

- **Diagrama T^0.**

Pe porțiunea de bară 1-2 forța tăietoare este constantă:

$T_{1-2}^{\,0} = T_{2-1}^{\,0} = +26{,}67KN;$

Pe porțiunea de bară 2-3 forța tăietoare este liniară:

$T_{2-3} = 26{,}67KN;$

$T_{3-2} = T_{2-3} - 20 \times 4 = -V_3^{\,0} = -53{,}33K$

Se observă punctul de anulare al forței tăietoare la distanța x_0, ceea ce indică un maxim în diagrama M:

$$T_{x_0} = 0 = V_1^0 - p \times x_0 = 26{,}67 - 20 \times x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1{,}33m;$$

- **Diagrama M^0.**

Pe porțiunea de bară 1-2 momentul încovoietor este liniar:

$$M_{1-2}^0 = 0; \quad M_{2-1}^0 = 26{,}67 \times 2 = 53{,}34KNm;$$

Pe porțiunea de bară 2-3 momentul încovoietor este parabolic cu un maxim în dreptul secțiunii de anulare a forței tăietoare:

$$M_{\max}^0 = 26{,}67 \times 3{,}33 - 20 \times 1{,}33 \times \frac{1{,}33}{2} = 71{,}12KNm; \qquad M_{3-2}^0 = 0;$$

Rezolvarea grinzii înclinate **(Fig. 1.5.).**

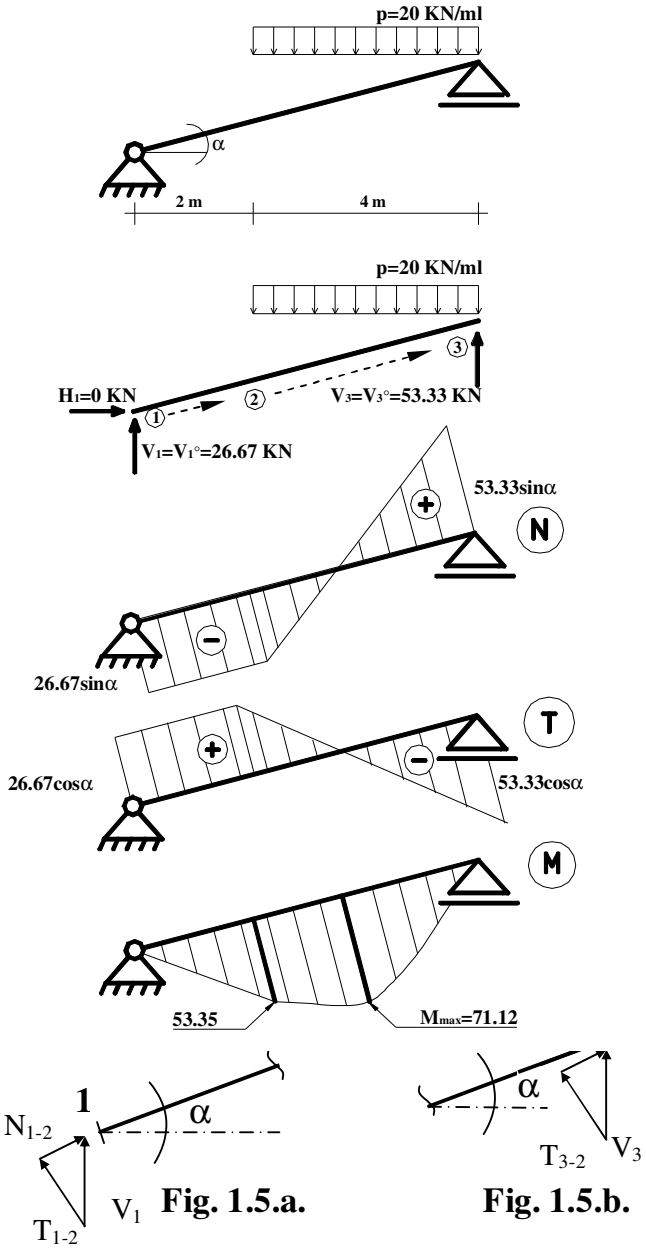


Fig. 1.5.a. **Fig. 1.5.b.**

a. Calculul reacţiunilor R.

$\sum X_i = 0; \quad \Rightarrow \quad H_1 = 0;$

$(\sum M)_3 = 0; \ \Rightarrow \quad V_1;$

$V_1 \times 6 - 20 \times 4 \times 2 = 0; \quad V_1 = V_1^{\,0} = 26{,}67KN;$

$(\sum M)_1 = 0; \ \Rightarrow \quad V_3;$

$-V_3 \times 6 + 20 \times 4 \times 4 = 0; \ V_3 = V_3^{\,0} = 53{,}33KN;$

Verificarea rezultatelor

$\sum Y_i = 26{,}67 + 53{,}33 - 20 \times 4 \equiv 0;$

Observaţie:

Reacţiunile sunt identice la cele două grinzi, acestea fiind încărcate numai cu forţe verticale $(H_1 = H_1^{\,0} = 0)$.

$$R \equiv R^0$$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

- **Diagrama N**

Pe porţiunea de bară 1-2 forţa axială este constantă. Aceasta reprezintă proiecţia după direcţia axei barei a tuturor forţelor de la ST sau DR secţiunii în care se face calculul.

$N_{1-2} = N_{2-1} = -V_1 \times \sin\alpha = -26{,}67\sin\alpha \ \ (KN).$

Pe porţiunea 2-3 de bară forţa axială variază liniar (din cauza forţei uniform distribuite exterioare):

$N_{2-3} = -26{,}67\sin\alpha \quad N_{3-4} = +V_3\sin\alpha = +53{,}33\sin\alpha$

Observaţie: $\boxed{N = -\,T^0 \sin\alpha}$

- **Diagrama T**

Pe porţiunea de bară 1-2 forţa tăietoare este constantă:

$$T_{1-2} = T_{2-1} = V_1\cos\alpha = +26{,}67KN;$$

Aceasta reprezintă suma proiecţiilor tuturor forţelor de la ST sau DR secţiunii după direcţia perpendiculară pe axa barei.

Pe porţiunea de bară 2-3 forţa tăietoare este liniară:

$T_{2-3} = 26{,}67 \times \cos\alpha[KN]; \ T_{3-2} = T_{2-3} - 20 \times 4 \times \cos\alpha = -V_3^{\,0} = -53{,}33 \times \cos\alpha[KN];$

$T_{x_0} = 26{,}67\cos\alpha - px_0\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1{,}33\ m.$

OBS. $\boxed{T = T^0\cos\alpha}$

- **Diagrama M**

Pe porțiunea 1-2 de bară momentul încovoietor este liniar. Acesta reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de la ST sau DR secțiunii în raport cu centrul de greutate al acesteia:

$$M_{1\text{-}2}=0 \quad ; \quad M_{2\text{-}1}= 2V_1= 53,34\ KNm = M^0_{2\text{-}1}.$$

Pe porțiunea 2-3 de bară momentul încovoietor este parabolic având un maxim în punctul de anulare al forței tăietoare *(x_0= 1,33 m)*.

$$M_{\max} = 26,67\times 3,33 - 20\times 1,33\times\frac{1,33}{2} = 71,12 = M^{0}_{\max}\ KNm.$$

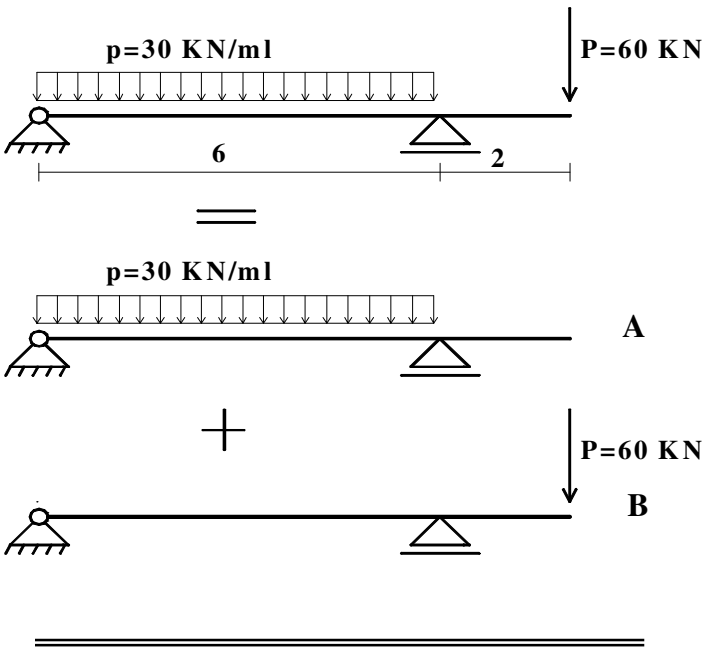
OBS. $\boxed{M=M^0}$, ca valori în secțiuni, nu ca suprafața.

<u>În concluzie:</u> grinda înclinată se poate fi înlocui cu grinda orizontală asociată ei, dacă se cere în calculul reacțiunilor şi al momentului maxim.

APLICAȚIA 4

Se cere rezolvarea grinzii din **Fig. 1.6** utilizând principiul superpoziției liniare.

Fig. 1.6.



La structurile cu comportare liniar elastică se poate aplica principiul superpoziției simplificând rezolvarea în anumite situații . Astfel structura se poate încarca rând pe rând cu fiecare forță exterioară, rezultatele finale obținându-se prin însumarea rezultatelor parțiale.

Rezolvarea situației A de încarcare.

b. Calculul reacțiunilor R.

$$\sum X_i = 0. \qquad H_{1,A} = 0.;$$

Se observă că:

$$V_{1,A} = V_{2,A} = \frac{p\times 6}{2} = \frac{30\times 6}{2} = 90KN.$$

a. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

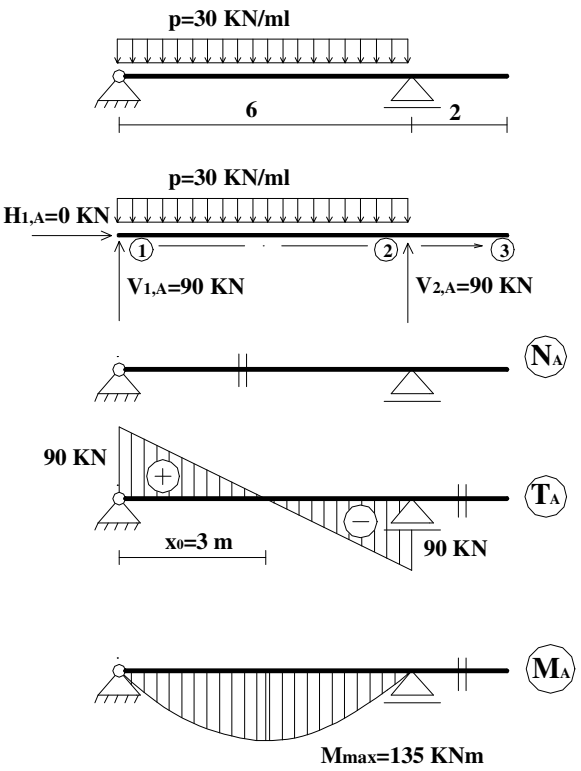
- **Diagrama N_A.** Nu avem forțe orizontale pe grindă, deci $N_A \equiv 0.$
- **Diagrama T_A.** Pe porțiunea de bară 1-2 forța tăietoare este liniară:

$$T_{1-2} = +V_{1,A} = +90 \text{ [KN]}.$$

$$T_{2-1} = -V_{2,A} = -90 \text{ [KN]}.$$

$$T_{x_0} = 0 = 90 - 30\times x_0 \ \Rightarrow \quad x_0 = 3m.$$

Situația A de încărcare.



Verificarea rezultatelor.

$$\sum Y_i = -20 - 60 + 80 = 0$$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi.

- **Diagrama N_B.**

$N_B \equiv 0$ deoarece avem numai forțe verticale pe grindă.

- **Diagrama T_B.**

Forța tăietoare este constantă pe porțiunile 1-2 respectiv 2-3, cu un salt în sensul şi de mărimea reacțiunii $V_{2,B}$.

$T_{1\text{-}2}=T_{2\text{-}1}=-20$ *KN;*
$T_{2\text{-}3}=T_{3\text{-}2}=+60$ *KN.*

Pe porțiunea de bară 2-3 forța tăietoare este zero.

- **Diagrama M_A.**

Pe porțiunea de bară 1-2 momentul încovoietor este parabolic:

$M_{1-2} = 0$

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} = V_{1,A} \times 3 - 30 \times 3 \times \frac{30}{2} = 135$$

$M_{2-1} = 0$.

Pe porțiunea de bară 2-3 momentul încovoietor este zero.

Rezolvarea situației B de încărcare.

a. Calculul reacțiunilor R.

$\sum X_i = 0.$ $H_{1,B} = 0.;$

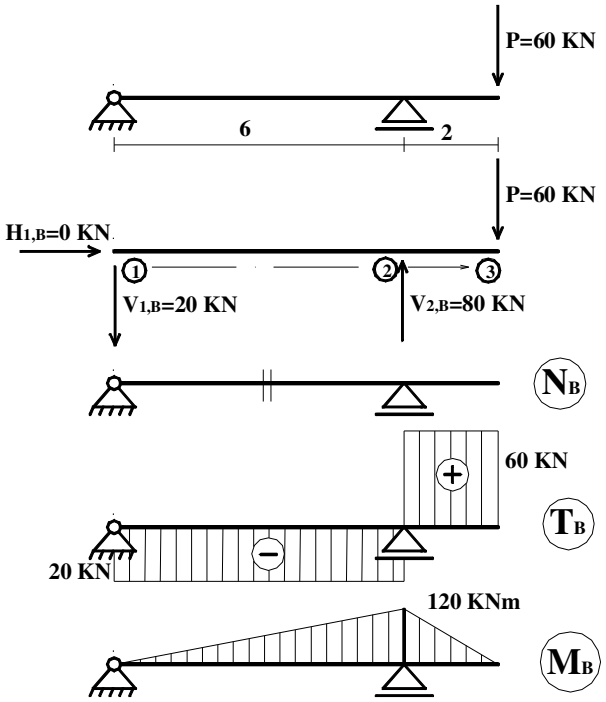
$(\sum M)_2 = 0; \Rightarrow V_{1,B}.$

$-V_{1,B} \times 6 + 60 \times 2 = 0$ $V_{1,B} = 20$ *KN*.

$(\sum M)_1 = 0; \Rightarrow V_{2,B}.$

$-V_{2,B} \times 6 + 60 \times 8 = 0$ $V_{2,B} = 80$ *KN.*

Situația B de încărcare.



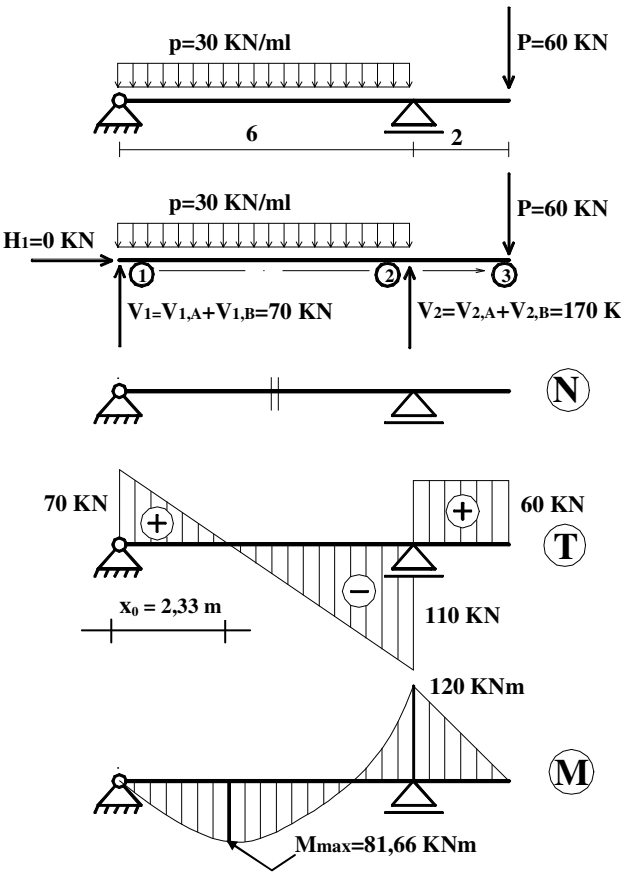


Fig. 1.6.c

- **Diagrama M_B.**

Momentul încovoietor este liniar pe porțiunile 1-2 respectiv 2-3, având un vârf în sensul reacțiunii $V_{2,B}$.

$M_{1\text{-}2}=0$; $M_{2\text{-}1}=-20\times6=-120$ *KNm*;

$M_{3\text{-}2}=0$.

Reacțiunile şi diagramele de eforturi pot fi obținute pe grinda inițială însumând valorile din situațiile **A** şi **B** de încărcare.(Fig. 1.6.c)

a. Calculul reacțiunilor

$H_1=0$;

$V_1=V_{1,A}+V_{1,B}=90-20=70$ *KN;*

$V_2=V_{2,A}+V_{2,B}=90+80=170$ *KN.*

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

- **Diagrama N** $N=0$.
- **Diagrama T**

$T_{1\text{-}2}=T_{1,A}+T_{1,B}=90-20=70$ *KN;*

$T_{2\text{-}1}=T_{2,A}+T_{2,B}=-90-20=-110$ *KN;*

$Tx_0=70-30x_0 \Rightarrow x_0=2{,}33$ *m;*

$T_{2,3}=T_{2,A}+T_{2,B}=0+60=60$ *KN;*

$T_{3\text{-}2}=T_{3,A}+T_{3,B}=0+60=60$ *KN.*

- **Diagrama M**

$M_{1\text{-}2}=0$*;*

$$M_{\max}=V_1\times x_0-p\times x_0\times\frac{x_0}{2}=70\times2{,}33-30\times2{,}33\times\frac{2{,}33}{2}=81{,}67\ KNm.$$

Se observă că valoarea şi poziția momentului maxim este diferită de situația **A** de încărcare.

$M_{2\text{-}1}=M_{2,A}+M_{2,B}=0+120=120$ *KN;*

$M_{3\text{-}2}=0$.

APLICAȚIA 5

Se cere rezolvarea grinzii simplu rezemate din Fig. 1.7.a, utilizând principiul proporționalității dintre acțiune şi răspuns.

Acest principiu se poate aplica la structurile cu comportare liniar elastică. Astfel, în locul forței P pe structură poate acționa o forță egală cu unitatea, rezultatele obținute fiind înmulțite ulterior cu orice valoare atribuită acesteia.

Fig. 1.7.a

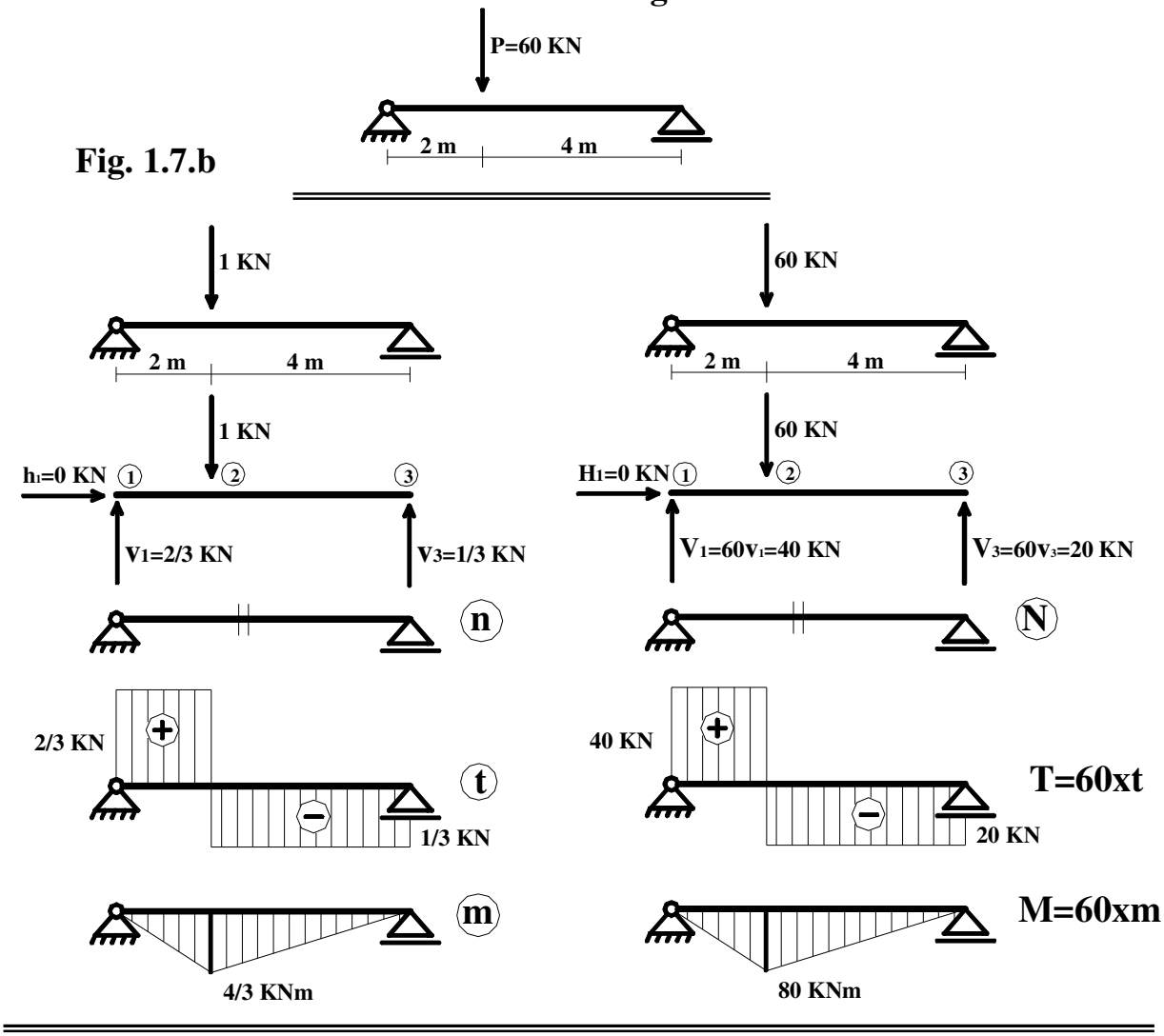


Fig. 1.7.b

Calculul reacţiunilor şi al eforturilor secţionale s-a făcut aplicând metodologia folosită la structurile anterioare.

Reacţiunile şi valorile eforturilor secţionale au fost obţinute aplicând principiul proporţionalităţii, după cum urmează:

R=P×r; T=P×t; M=P×m. (Fig. 1.7.b)

APLICAȚIA 6

Pentru consolele din **Fig. 1.8 a** şi **b** se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi.

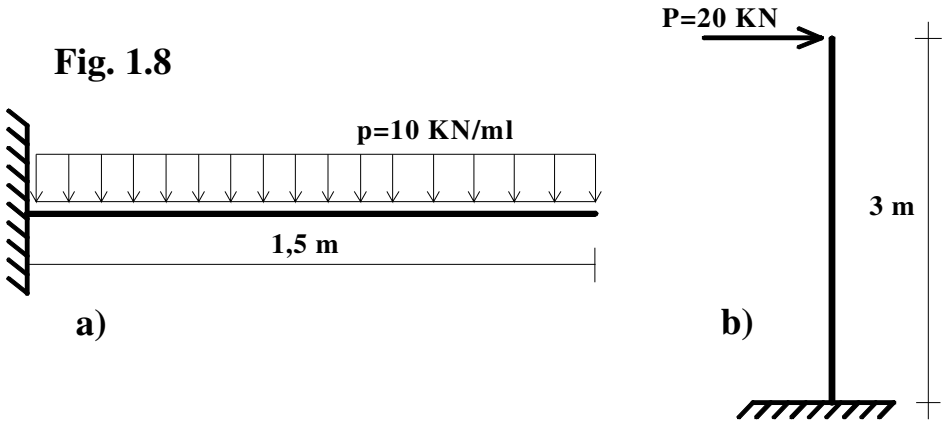


Fig. 1.8

Rezolvarea consolei din Fig. 1.8. a:

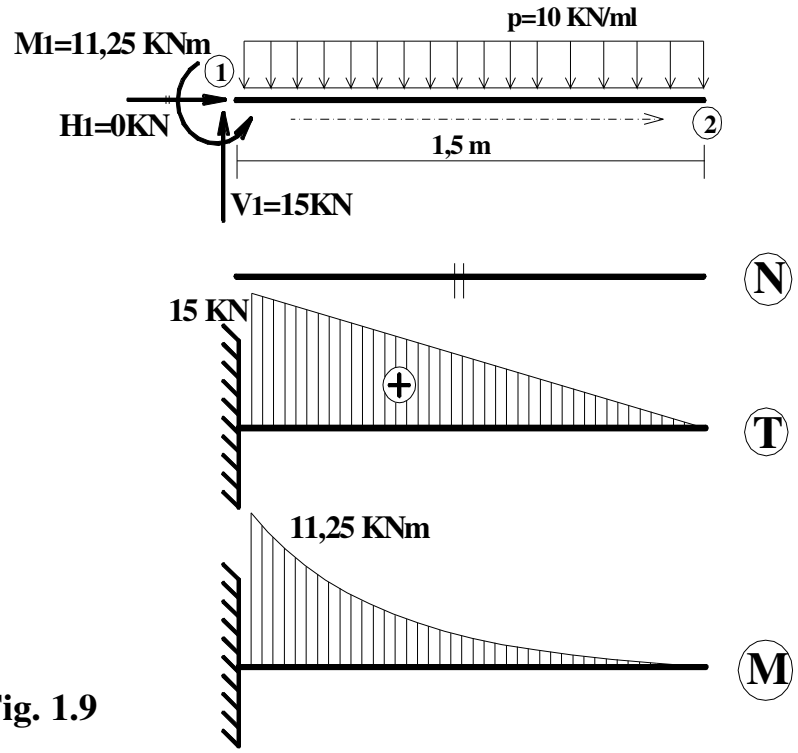


Fig. 1.9

a. Calculul reacțiunilor (Fig. 1.9)

$\sum x_i = 0 \Rightarrow H_1 = 0\ KN.$

$\sum y_i = V_1 - 10 \times 1{,}5 = 0 \Rightarrow \quad V_1 = 15\ KN.$

$(\sum M)_1=0 \Rightarrow \quad -M_1 + 10 \times 1,5 \times 0,75 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 11,25\ KNm.$

Verificare: $\sum M_2 = -11,25 + 15 \times 1,5 - 10 \times 1,5 \times 0,75 = 0.$

b. Trasarea diagramelor de eforturi (Fig. 1.9):

Forța axială este nulă pe bară deoarece reacțiunea orizontală H_1 este zero.

Forța tăietoare variază liniar:

$T_{1\text{-}2} = V_1 = 15\ KN; \qquad T_{2\text{-}1} = 0.$

Momentul încovoietor este parabolic:

$M_{1\text{-}2} = -M_1 = -11,25\ KNm$

$M_{2\text{-}1} = 0.$

Rezolvarea consolei din figura 1.8.b:

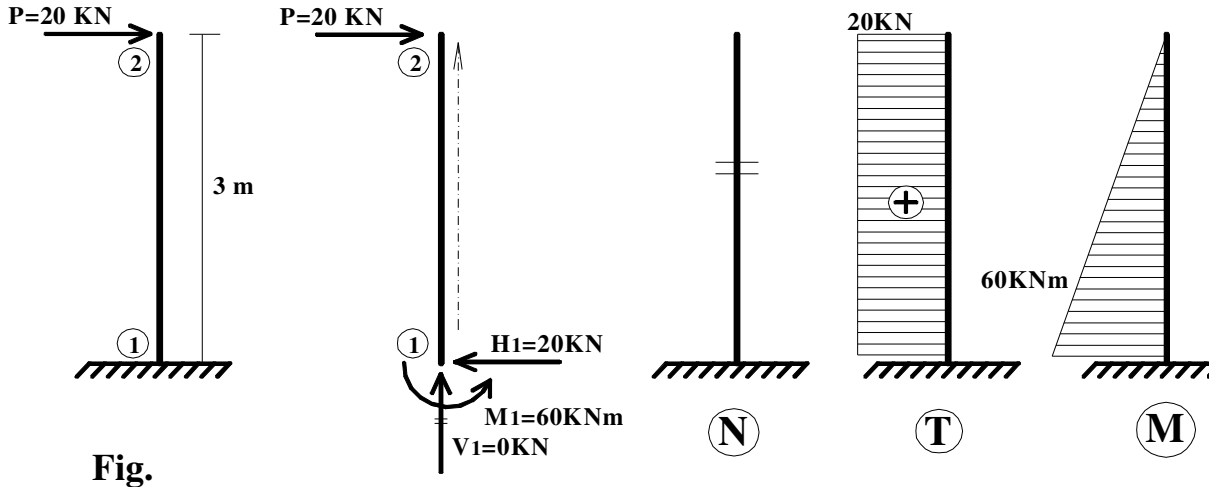


Fig.

a. Calculul reacțiunilor (Fig. 1.10)

$\sum x_i = 0 \quad \Rightarrow P - H_1 = 0\ KN \qquad \Rightarrow H_1 = P = 20\ KN$

$\sum y_i = 0 \qquad \Rightarrow V_1 = 0\ KN.$

$(\sum M)_1=0 \Rightarrow \quad -M_1 + 20 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 60\ KNm.$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Forța axială pe consolă este nulă, deorece reacțiunea verticală V_1 este zero.

Forța tăietoare este constantă pe bară:

$T_{1\text{-}2} = T_{2\text{-}1} = +\,20\ KN.$

Momentul încovoietor este liniar pe bară după cum urmează:

$M_{1\text{-}2} = -\,M_1 = -60\ KNm;$

$M_{2\text{-}1} = 0.$

CAPITOLUL 2
GRINZI CU CONSOLE ŞI ARTICULAŢII (GERBER)

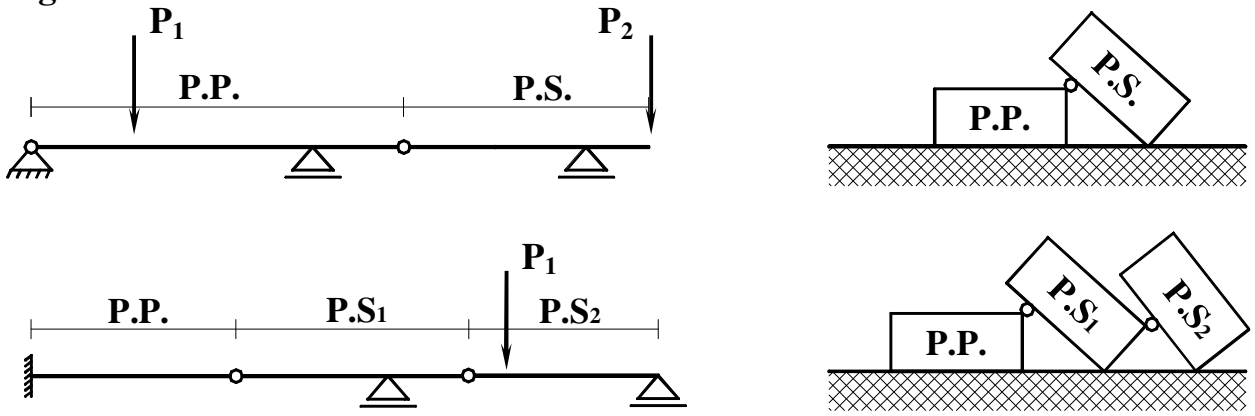
Grinzile cu console şi articulaţii (GERBER) sunt sisteme static determinate formate din bare drepte asamblate între ele prin articulaţii. Grinzile care intră în alcătuirea unei grinzi cu console şi articulaţii au roluri diferite după cum urmează:

- părţile principale **P.P.** sunt părţile de structură care sunt reazemate direct pe teren şi joacă rolul de bază de sprijin pentru părţile adăugate ulterior.
- părţile secundare **P.S.** sunt părţile de structură care sunt reazemate pe părţile principale direct sau indirect sau şi pe teren.

Partea principală este invariabilă geometric prin ea însăşi şi preia singură toate sarcinile aferente ei.

Partea secundară nu poate exista independent. Ea devine invariabilă geometric numai prin sprijinirea pe alte părţi de structură sau şi pe teren.

Fig. 2.1



În figura 2.1. sunt prezentate două grinzi GERBER, prima având o parte secundară, iar cea de-a doua două părţi secundare.

Încărcările aplicate direct pe o parte secundară se transmit numai părţilor vecine. Încărcările direct aplicate pe o parte principală sunt preluate integral de aceasta.

Pentru calculul reacţiunilor şi al efoturilor secţionale se recomandă desfacerea grinzilor cu console şi articulaţii în grinzile componente. Calculul începe cu rezolvarea părţii secundare pe care nu reazemă o alta parte a structurii.

APLICAȚIA 1

Se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi secționale N, T, M la grinda cu console şi articulații din **Fig. 2.2**.

Se observă că grinda are o parte principală (porțiunea 1-3) şi o parte secundară (porțiunea 3-5). Rezolvarea se începe cu partea secundară.

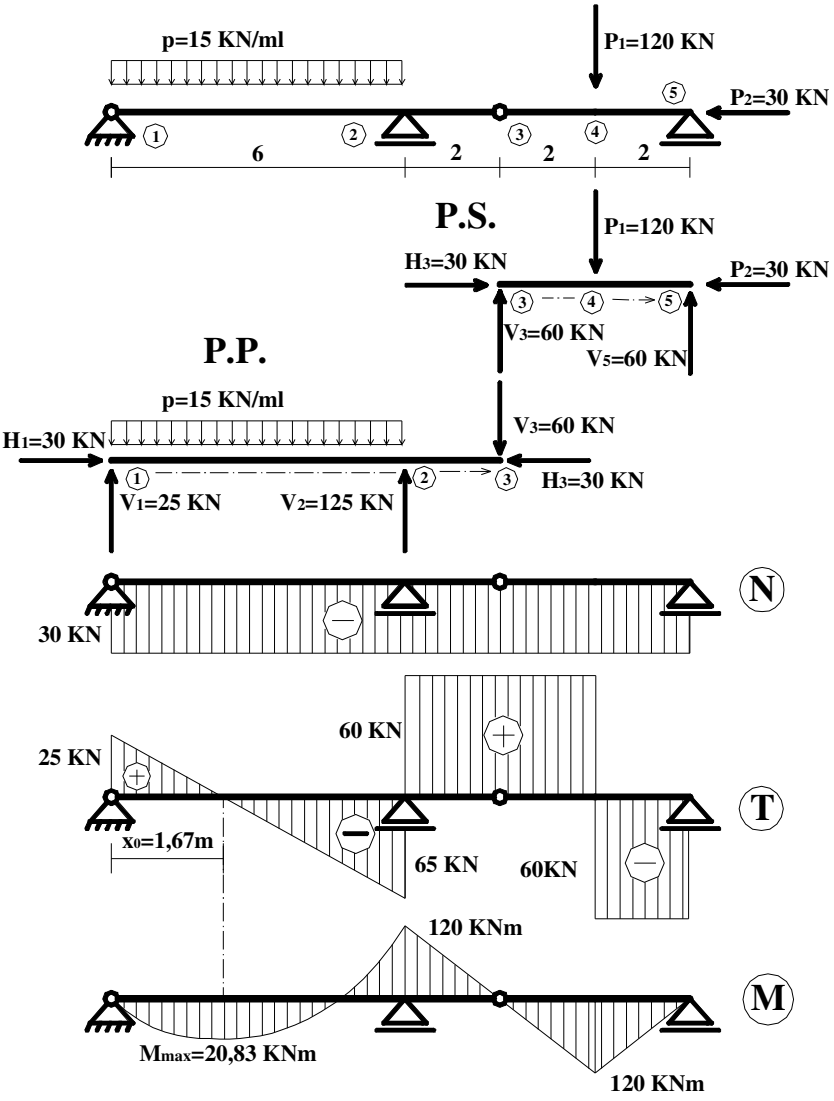


Fig. 2.2

a. Calculul reacțiunilor

P.S.

$$\sum x_i = 0; \Rightarrow \quad H_3 - 30 = 0 \qquad \Rightarrow \quad H_3 = 30\ KN.$$

$$(\sum M)_5 = 0 \Rightarrow \quad V_3 \times 4 - 120 \times 2 = 0 \Rightarrow \quad V_3 = V_5 = 60\ KN.$$

P.P.

În secțiunea 3 pe partea principală acționează forțele interioare H_3 şi V_3 egale şi de sens contrar.

$$\sum x_i = 0; \Rightarrow \ H_1 - 30 = 0 \qquad \Rightarrow \ H_1 = 30 \ KN.$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow \ V_1 \times 6 - 15 \times 6 \times 3 + 60 \times 2 = 0 \Rightarrow V_1 = 25\ KN.$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow - V_2 \times 6 + 60 \times 8 + 15 \times 6 \times 3 = 0 \Rightarrow V_2 = 125\ KN.$$

Verificare: $\sum y_i = 25 + 125 - 15 \times 6 - 60 = 0$.

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

- **Diagrama N**

Pe grindă N = ct = -30 KN, singurele forțe orizontale fiind H_1, H_3, şi P_2.

- **Diagrama T**

Pe porțiunea de grindă 1-2 forța tăietoare este liniară:

$T_{1\text{-}2} = +25\ KN$; $T_{2\text{-}1} = +25 - 15 \times 6 = -65\ KN$;

$Tx_0 = 0 = 25 - p \times x_0 \Rightarrow 25 - 15 \times x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1{,}67\ m.$

Pe porțiunea de grindă 2-3 forța tăietoare este constantă:

$T_{2\text{-}3} = T_{3\text{-}2} = +60\ KN.$

În secțiunea 2 a apărut un salt de mărimea şi în direcția reacțiunii V_2=125 KN.

Pe partea secundară forța tăietoare este constantă pe porțiuni, cu un salt în direcția şi de mărimea forței concentrate P_1=120 KN.

$T_{3\text{-}4} = T_{4\text{-}3} = +60\ KN.$ $T_{4\text{-}5} = T_{5\text{-}4} = +60 - 120 = -60\ KN.$

- **Diagrama M**

Pe porțiunea 1-2 a părții principale momentul încovoietor variază parabolic, având un maxim în punctul de anulare al forței tăietoare (x_0=1,67 m).

$M_{1-2} = 0$; $M_{max}=25 \times 1{,}67 - 15 \times 1{,}67 \times \frac{1{,}67}{2} = 20{,}83\ KNm$

$M_{2-1} = -(V_3 \times 2) = -(60 \times 2) = -120\ KN$ (s-au redus forțele de la DR secțiunii)

Pe porțiunile 2-3, 3-4, 4-5 momentul încovoietor variază liniar după cum urmează:

$M_{2-3} = M_{2-1} = -120\ KNm$; M_3=0 (articulație interioară)

$M_{4-3} = V_3 \times 2 = 60 \times 2 = 120\ KNm$; $M_{5-4} = 0$.

APLICAȚIA 2

Se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi secționale N, T, M la grinda cu console şi articulații din **Fig. 2.3.**

Se observă că grida are două părți secundare (porțiunile 1-3 şi 3-5) şi o parte principală (porțiunea 5-6). Rezolvarea se începe cu **P.S$_2$.** şi continuă cu **P.S$_1$.** Ultima se rezolvă partea principală.

a. Calculul reacțiunilor

P.S$_2$.

$\sum x_i = 0; \quad \Rightarrow \quad H_3 = 0;$

$(\sum M)_3=0 \Rightarrow V_2 \times 3 - 30 \times 5 = 0 \Rightarrow V_2 = 50\ KN.$

$(\sum M)_2=0 \Rightarrow V_3 \times 3 - 30 \times 2 = 0 \Rightarrow V_3 = 20\ KN.$

Verificare: $\sum y_i = -30 + 50 - 20 = 0$.

P.S$_1$.

$\sum x_i = 0; \quad \Rightarrow \quad H_5 = 0$

$(\sum M)_4=0 \Rightarrow -V_5 \times 2 + 20 \times 2 \times 1 + 20 \times 3 = 0 \Rightarrow V_5 = 50\ KN.$

$(\sum M)_5=0 \Rightarrow -V_4 \times 2 - 20 \times 2 \times 1 + 20 \times 5 = 0 \Rightarrow V_4 = 30\ KN.$

Verificare: $\sum y_i = 20 + 50 - 30 - 40 = 0$.

P.P.

$\sum x_i = 0;$ $\Rightarrow H_6 = 0$ *KN.*

$\sum y_i = V_6 - 50 - 20 \times 6 = 0$ $\Rightarrow V_6 = 170$ *KN.*

$(\sum M)_6 = 0 \Rightarrow M_6 - 20 \times 6 \times 3 - 50 \times 6 = 0 \Rightarrow M_6 = 660$ *KNm.*

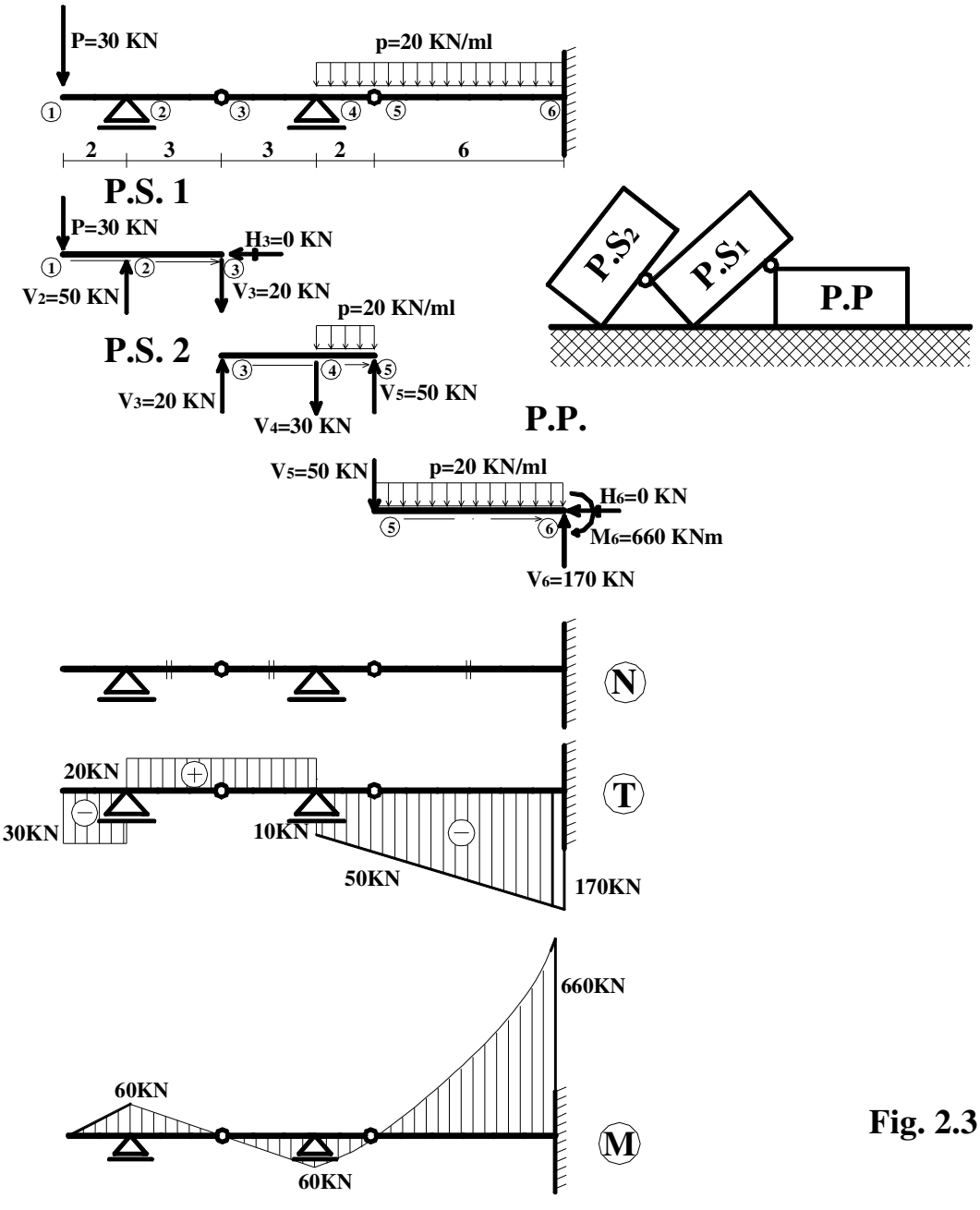


Fig. 2.3

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

- **Diagrama N**

Nu avem forțe orizontale pe grindă, deci $N = 0$.

- **Diagrama T**

Pe porțiunile părții secundare **P.S$_2$.**, forța tăietoare este constantă:

$T_{1\text{-}2} = T_{2\text{-}1} = -30\ KN$; $T_{2\text{-}3} = T_{3\text{-}2} = -30 + 50 = +20\ KN$.

Pe porțiunea 3-4, a părții secundare **P.S$_1$.** forța tăietoare este constantă.

$T_{3\text{-}4} = T_{4\text{-}3} = ct = +20\ KN$.

Pe porțiunea 4-5 a grinzii, forța tăietoare variază liniar:

$T_{4\text{-}5} = T_{4\text{-}3} - V_4 = +20 - 30 = -10\ KN$; $T_{5\text{-}4} = -10 - 20 \times 2 = -50\ KN$.

Pe porțiunea 5-6, a părții principale, forța tăietoare variază liniar:

$T_{5\text{-}6} = T_{5\text{-}4} = -50\ KN$; $T_{6\text{-}5} = -50 - 20 \times 6 = -170\ KN = -V_6$

- **Diagrama M**

Pe porțiunile 1-2 şi 2-3 ale parții secundare **P.S$_2$.** momentul încovoietor variază liniar:

$M_{1\text{-}2} = 0$; $M_{2\text{-}1} = -30 \times 2 = -60\ KNm$; $M_{3\text{-}2} = 0$.

Pe porțiunea 3-4 a părții secundare **P.S$_1$.** momentul încovoietor variază liniar:

$M_{3\text{-}4} = 0$; $M_{4\text{-}3} = 20 \times 3 = 60\ KNm$.

Pe porțiunea 4-5 a grinzii, momentul încovoietor variază parabolic:

$M_{4\text{-}5} = +20 \times 3 = 60\ KNm$; $M_{5\text{-}4} = 0$. (articulație interioară)

Pe porțiunea 5-6 a părții principale, momentul încovoietor variază parabolic:

$M_{5\text{-}6} = 0$; $M_{6\text{-}5} = -(+M_6) = -660\ KNm$. (s-au redus forțele de la DR secțiunii).

CAPITOLUL 3
CADRE PLANE

Cadrele sunt structuri formate din bare prinse în noduri rigide sau noduri considerate articulații. (**Fig. 3.1** si **3.2**)

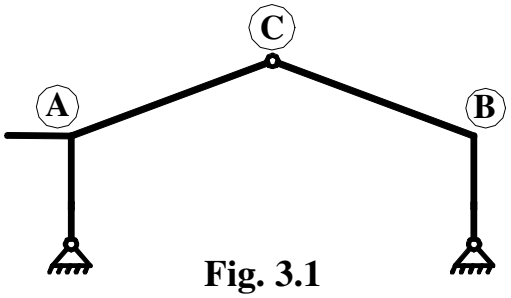


Fig. 3.1

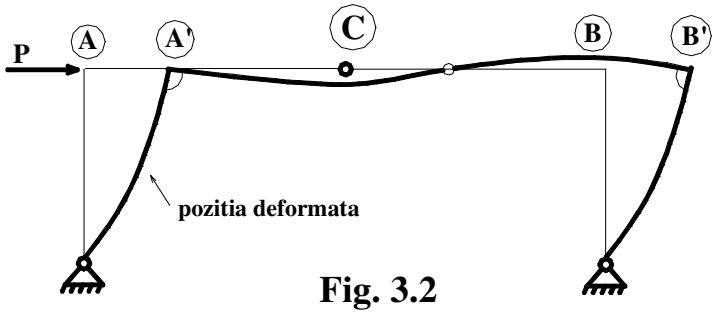


Fig. 3.2

- **A, B noduri rigide.**
- **C nod considerat articulație.**

Într-un nod rigid, datorită încastrării perfecte a barelor în nod, unghiul dintre bare se menține neschimbat şi după deformarea cadrului ⇒ **efect de nod rigid.**
După deformarea cadrului în nodurile rigide **A** şi **B** s-a menținut unghiul de 90^0 dintre bare.

Ca efect al nodului rigid, într-un nod cu două bare valoarea momentului încovoietor se poate rabate de la o bară la alta, menținând echilibrul nodului (rabatere de la **interior la interior** sau de la **exterior la exterior**) (vezi **Fig. 3.3**).

În diagramele de eforturi secționale N, T, M trasate la cadre apar salturi în valori chiar dacă forțele exterioare sunt continue. Aceste salturi (discontinuități) pot fi de două tipuri:

- **discontinuitate de fibră** ⟹ produsă de modificarea direcției axei barei.

- <u>discontinuitate de nod</u> ⟹ apare în dreptul unui nod de pe parcursul barei, deoarece barele concurente în nod acționează asupra acesteia cu forțe şi momente concentrate.

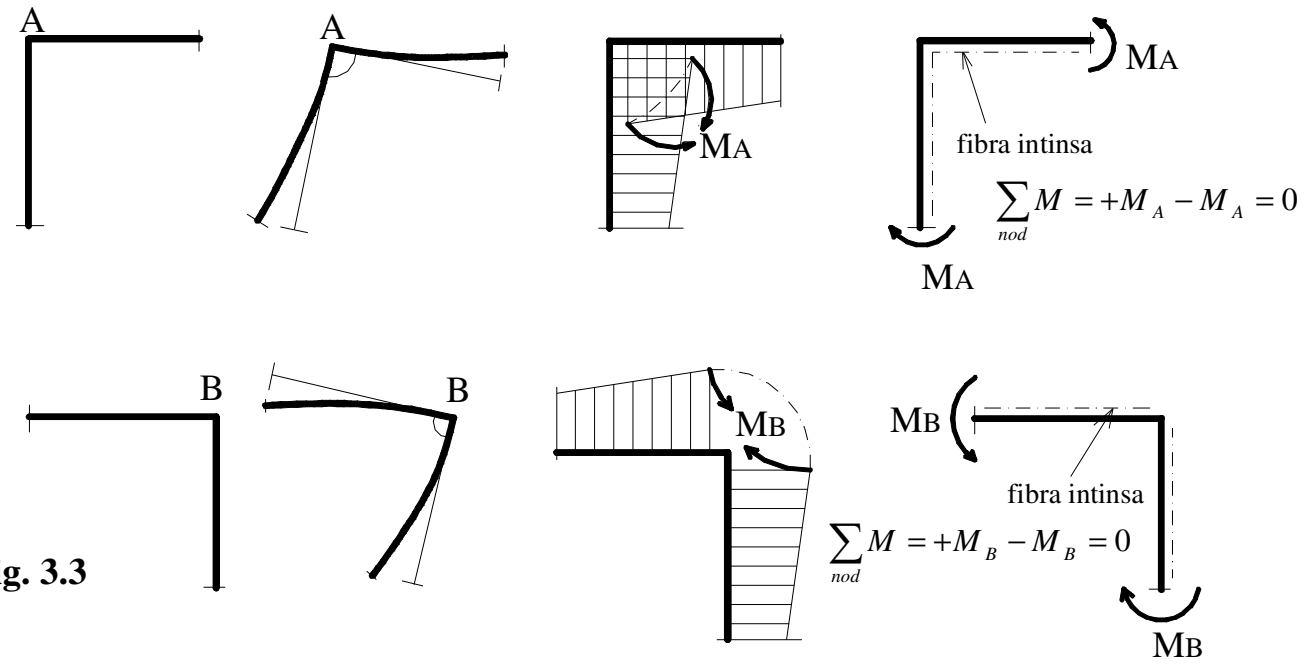


Fig. 3.3

A. CADRE SIMPLE:

Din categoria cadrelor simple fac parte:

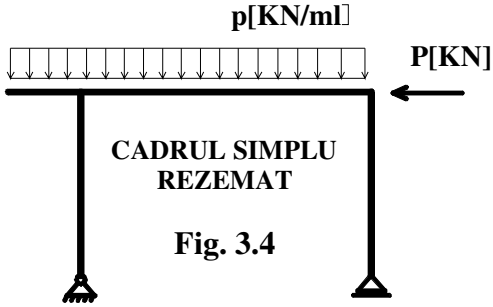


Fig. 3.4

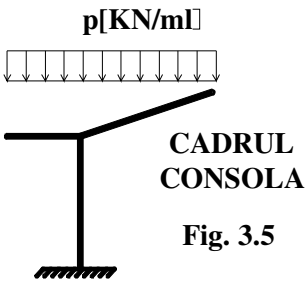


Fig. 3.5

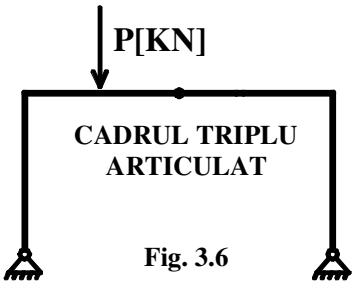


Fig. 3.6

APLICAȚIA 1.

Pentru cadrul simplu rezemat din Fig. 3.7 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T, M.

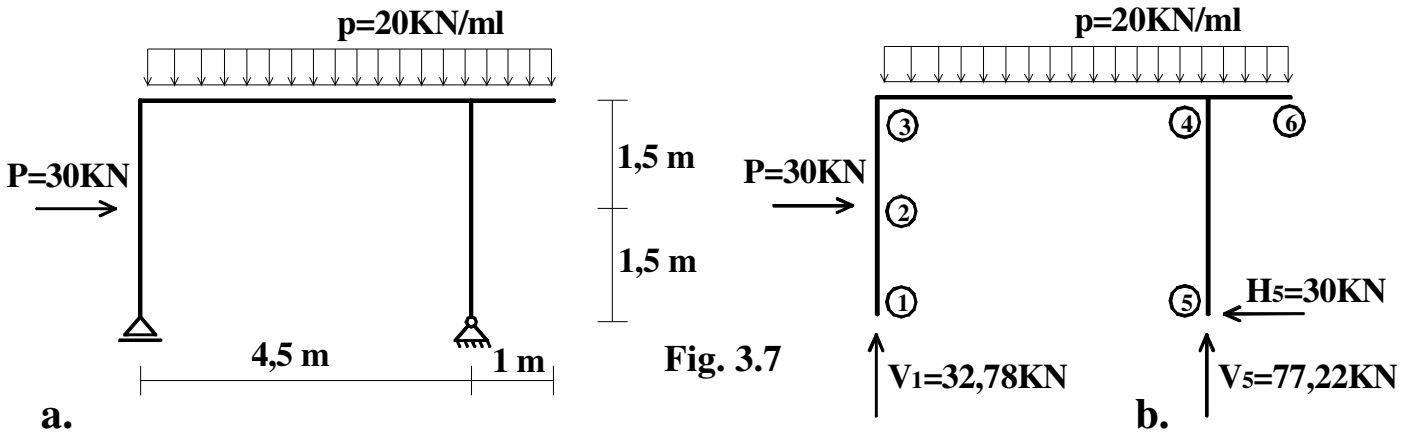
a. Calculul reacțiunilor

$$\sum x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -H_5 + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_5 = 30\ KN.$$

$$(\sum M)_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 \times 4{,}5 + 30 \times 1{,}5 - 20 \times 5{,}5 \times 1{,}75 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 32{,}78\ KN.$$

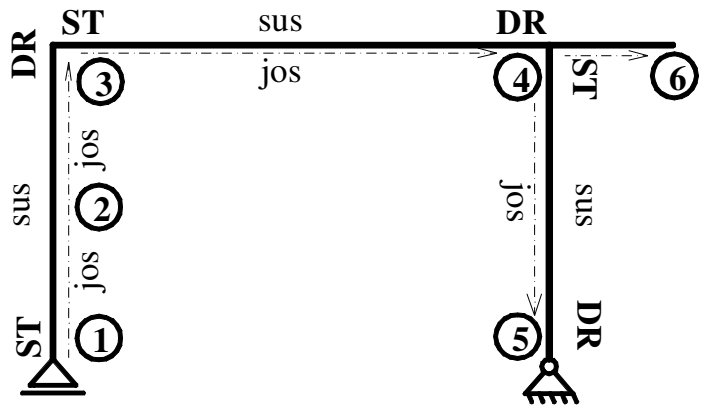
$$(\sum M)_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_5 \times 4{,}5 + 30 \times 1{,}5 - 20 \times 5{,}5 \times 2{,}75 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_5 = 77{,}22\ KN.$$

Verificare: $\sum y_i = 32{,}78 + 77{,}22 - 20 \times 5{,}5 = 0.$



b. Trasarea diagramelor de eforturi

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se recomandă alegerea unui sens de parcurgere pe fiecare bară a structurii, stabilind astfel noțiunile de ST, DR, SUS, JOS. Astfel, la structura dată s-au ales următoarele sensuri de parcurgere în conformitate cu **Fig. 3.8**.



- **Diagrama N**

Forța axială **dintr-o secțiune dată „*i*” reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor de la ST sau de la DR secțiunii după direcția axei barei.**

Se utilizează **Fig. 3.7.b** pentru calculul eforturilor secționale.
Se cunoaşte că:

Pe bara 1-2-3: **N = ct.**
(porțiunile 1-2 si 2-3 neîncărcate)
$N_{1-3} = N_{3-1} = ct. = - V_1 = -$ 32,78 *KN* (reprezentată JOS);

Pe bara 3 – 4: **N = ct.**
(forță uniform distribuită pe parcurs)
$N_{3-4} = N_{4-3} = - P = -$ 30 *KN* (reprezentată JOS);

Pe bara 4 – 5: **N = ct.**
(fără încărcare exterioară pe parcurs)
$N_{4-5} = N_{5-4} = - V_5 = -$ 77,22 *KN* (s-au redus forțele de la DR);

Pe bara 4 – 6: **N = ct.**
(forță uniform distribuită pe parcurs)
$N_{4-6} = N_{6-4} = 0$.

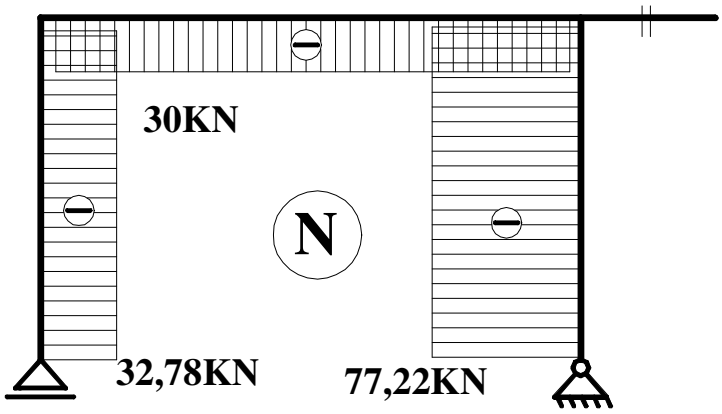


Fig. 3.9

- **Diagrama T**

Forța tăietoare **dintr-o secțiune dată „*i*” reprezintă suma proiecțiilor tuturor forțelor de la ST sau DR secțiunii după direcția normală pe axa barei.**

Pe bara 1-2-3: T = ct (pe porțiuni)
$T_{1-2} = T_{2-1} = 0$; $T_{2-3} = T_{3-2} = - P = -$ 30 *KN.* (se reprezintă JOS)

Pe bara 3-4: forța tăietoare este liniară

$T_{3-4} = + V_1 = +32,78\ KN;$

$T_{4-3} = + V_1 - 20 \times 4,5 = -57,22\ KN$ (reprezentată JOS).

$T_{Xo} = 0 = V_1 - p \times x_0 = 32,78 - 20 \times x_0 \Rightarrow x_0 = 1,64\ m.$

Pe bara 4-5: T=ct.

$T_{4-5} = T_{5-4} = + H_5 = +30\ KN$ (s-au redus forțele de la DR; valoarea se reprezintă SUS).

Pe bara 4-6: forța tăietoare este liniară

$T_{4-6} = 20 \times 1 = +20\ KN$ (s-au redus forțele de la DR; valoarea se reprezintă SUS)

$T_{6-4} = 0.$

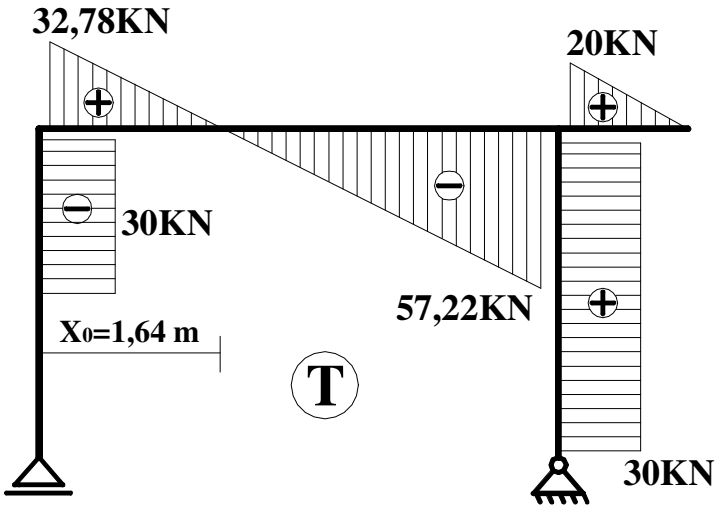
- **Diagrama M**

Momentul încovoietor **dintr-o secțiune dată „*i*" reprezintă suma momentelor tuturor forțelor de la ST sau de la DR secțiunii exprimate în raport cu centrul de greutate al acesteia.**

Pe bara 1-2-3: momentul încovoietor este liniar:

$M_{1-2} = M_{2-1} = 0;\ M_{3-2} = -P \times 1,5 = -45\ KNm$ (se reprezintă SUS).

Fig. 3.10



Pe bara 3-4: momentul încovoietor este parabolic

$M_{3-4} = M_{3-2} = -45\ KNm$ (nod rigid cu două bare, momentul se rabate).

$M_{4-3} = 32,78 \times 4,5 - 30 \times 1,5 - 20 \times 4,5 \times \frac{4,5}{2} = -100\ KNm.$ (s-au redus forțele de la ST secțiunii; valoarea se reprezintă SUS).

$M_{max} = 32,78 \times 1,64 - 30 \times 1,5 - 20 \times 1,64 \times \frac{1,64}{2} = -18,137\ KNm.$

Pe bara 4-5: momentul încovoietor este liniar

$M_{4\text{-}5} = -(H_5 \times 3) = -90\ KNm.$ (s-au redus forțele de la DR secțiunii; valoarea se reprezintă SUS)

$M_{5\text{-}4} = 0.$

Pe bara 4-6: momentul încovoietor este parabolic.

$M_{4\text{-}6} = -(20 \times 1 \times 0{,}5) = -10\ KNm$ (s-au redus toate forțele de la DR secțiunii; valoarea se reprezintă SUS).

$M_{6\text{-}4} = 0.$

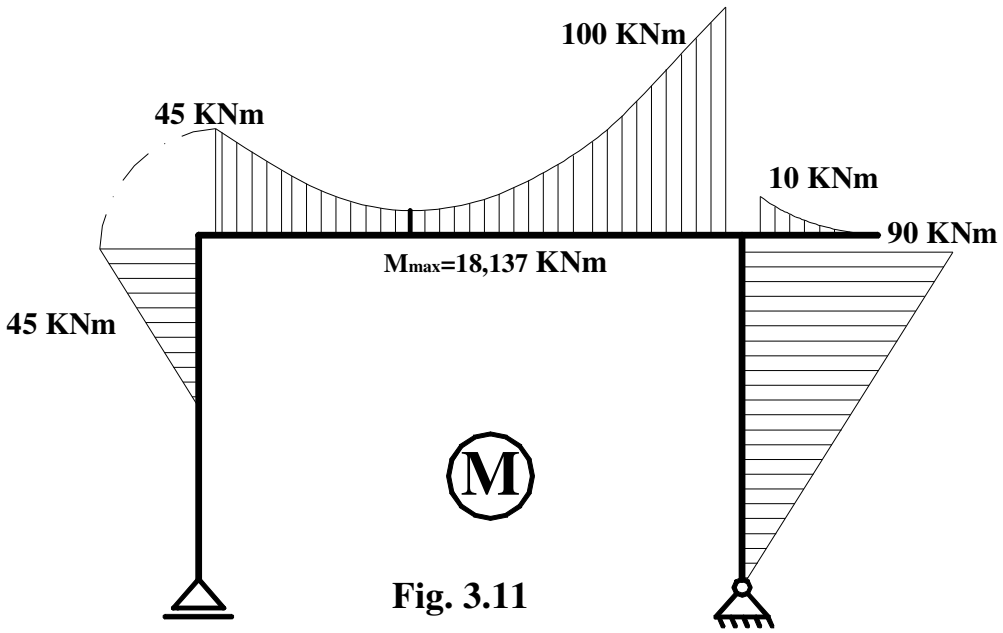


Fig. 3.11

c. Verificarea diagramelor de eforturi

Pentru verificare se utilizează ecuațiile de echilibru exprimate pentru fiecare nod al structurii considerat punct în plan. Pe nod acționează forțele exterioare direct aplicate şi eforturile secționale N,T şi M calculate. În plan pentru un punct se pot scrie trei ecuații de echilibru independente:

NOD

$\left.\begin{matrix} \sum x_i = 0 \\ \sum y_i = 0 \end{matrix}\right\}$ **se folosesc la verificarea diagramelor N + T.**

$(\sum M)_i = 0$ **Se foloseste la verificarea diagramei M.**

NODUL 3

Verificare N+T

$\sum x_i = 30 - 30 = 0$

$\sum y_i = 32{,}78 - 32{,}78 = 0$

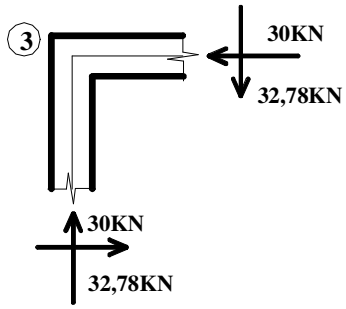
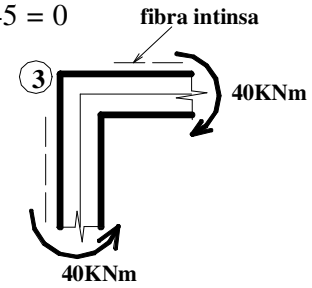


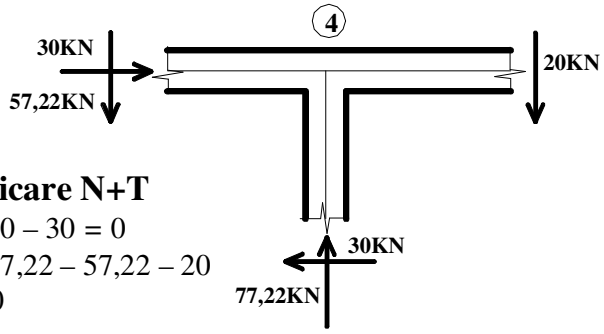
Fig. 3.12

Verificare M

$(\sum M) = -45 + 45 = 0$



NODUL 4



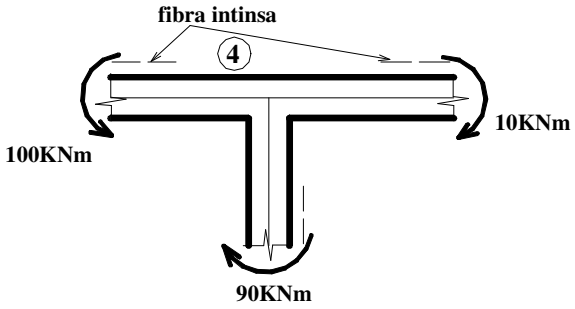
Verificare N+T

$\sum x_i = 30 - 30 = 0$

$\sum y_i = 77{,}22 - 57{,}22 - 20 = 0$

Verificare M

$(\sum M) = -100 + 90 + 10 = 0$



APLICAȚIA 2

Pentru cadrul consolă din Fig. 3.13 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T si M:

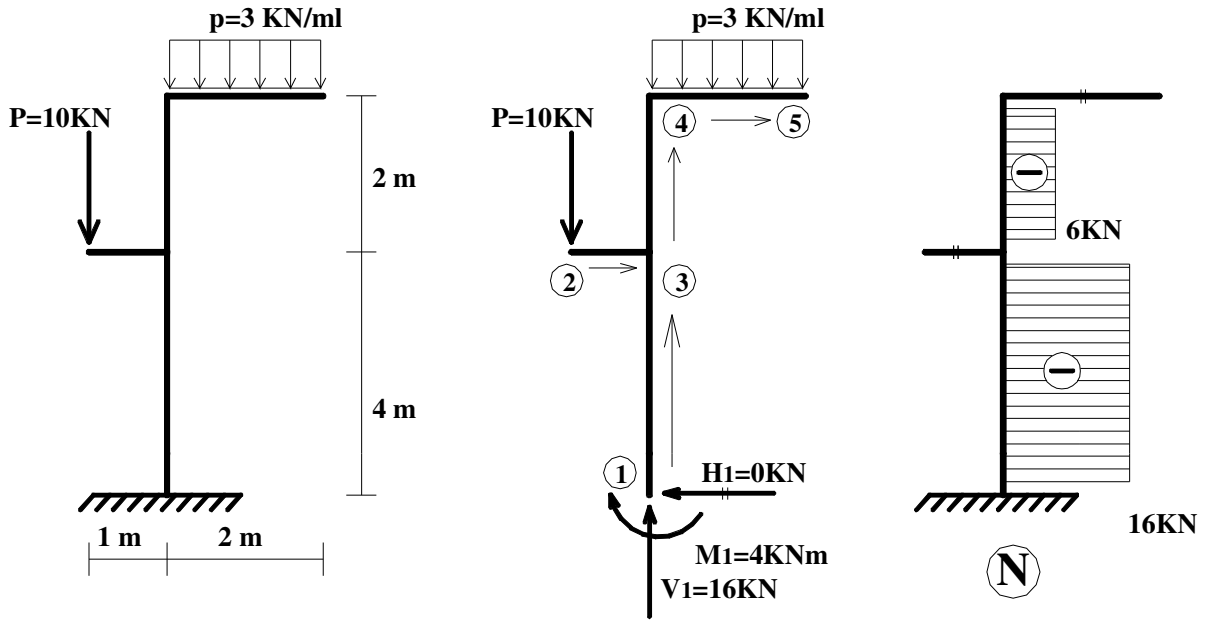
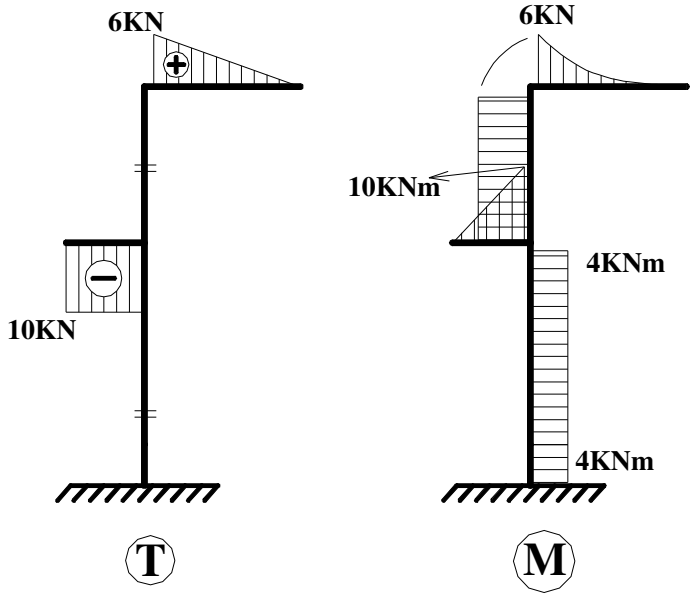


Fig. 3.13



a. Calculul reacțiunilor (vezi Fig. 3.13)

$\sum x_i = 0 \Rightarrow H_1 = 0\ KN$;

$\sum y_i = 0 \Rightarrow V_1 - 10 - 3 \times 2 = 0$

$\Rightarrow V_1 = 16\ KN$;

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow M_1 - 10 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 = 0$

$\Rightarrow M_1 = 4\ KNm.$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi (vezi Fig. 3.13)

- **Diagrama N**

Pe bara 1-3: N = ct.

$N_{1\text{-}3} = N_{3\text{-}1} = ct. = -\ V_1 = -\ 16\ KN$ (reprezentată JOS);

Pe bara 2-3: N = ct.

$N_{2\text{-}3} = N_{3\text{-}2} = 0$

Pe bara 3-4: N = ct.

$N_{3-4} = N_{4-3} = - V_1 + P = - 16 + 10 = - 6\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 4-5: N = ct.

$N_{4-5} = N_{5-4} = 0\ KN$.

- **Diagrama T**

Pe bara 1-3: T = ct.

$T_{1-3} = T_{3-1} = 0$; $(H_1 = 0)$;

Pe bara 2-3: T = ct.

$T_{2-3} = T_{3-2} = - P = -10\ KN$; (se reprezintă JOS).

Pe bara 3-4: T = ct.

$T_{3-4} = T_{4-3} = 0$; $(H_1 = 0)$;

Pe bara 4-5: T este liniară.

$T_{4-5} = + 3 \times 2 = 6$; $T_{5-4} = 0$; (se reprezintă SUS).

- **Diagrama M**

Pe bara 1-3: momentul încovoietor este ct. (T = 0).

$M_{1-3} = M_{3-1} = M_1 = + 4\ KNm$;

Pe bara 2-3: momentul încovoietor este liniar

$M_{2-3} = 0$; $M_{3-2} = - 10 \times 1 = - 10\ KNm$; (se reprezintă SUS).

Pe bara 3-4: momentul încovoietor este ct. (T = 0).

$M_{3-4} = M_{4-3} = + 4 - 10 \times 1 = - 6\ KNm$; (se reprezintă SUS).

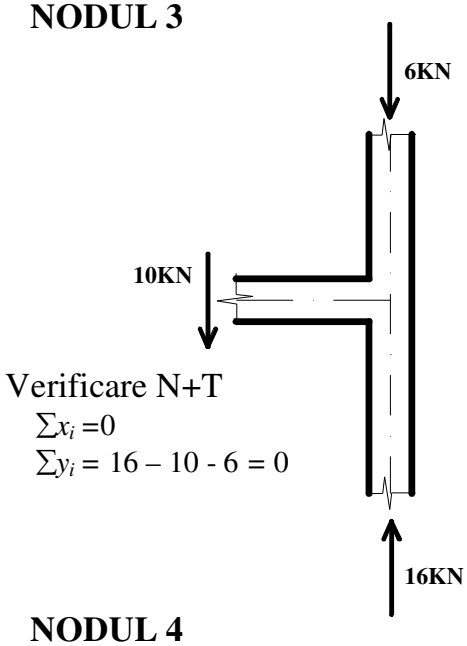
Pe bara 4-5: momentul încovoietor este parabolic

$M_{4-5} = - (3 \times 2 \times 1) = - 6$ KNm (s-au redus forțele de la dreapta secțiunii).

a. Verificarea diagramelor (Fig. 3.14. a & .b)

Pentru verificare se utilizează, ca şi în cazul aplicației 1, ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod. Pentru un punct, în plan, putem scrie trei ecuații de echilibru independente. Acestea sunt două ecuații proiecție (după direcția celor două axe ortogonale) şi una moment. În fig. 3.14 se poate observa modul în care se verifică echilibrul nodului.

NODUL 3

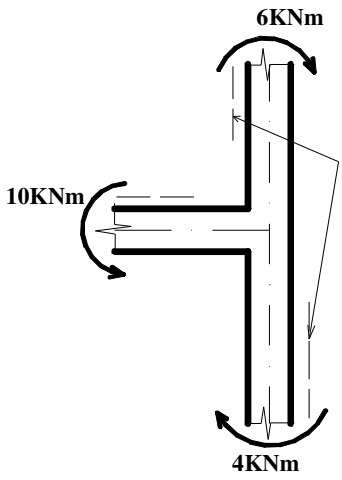


Verificare N+T

$\sum x_i = 0$

$\sum y_i = 16 - 10 - 6 = 0$

Fig. 3.14.a



Verificare M

$(\sum M) = - 10 + 4 + 6 = 0$

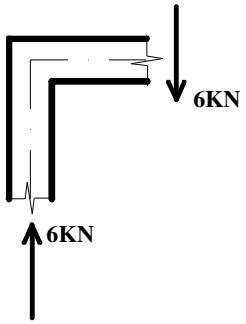
Fig. 3.14.b

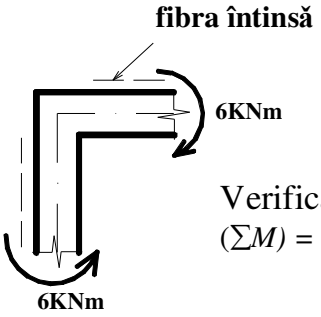
NODUL 4

Verificare N+T

$\sum x_i = 0$

$\sum y_i = - 6 + 6 = 0$





Verificare M

$(\sum M) = - 6 + 6 = 0$

Fig. 3.14

APLICAȚIA 3

Pentru cadrul triplu articulat din fig. 3.15, se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M:

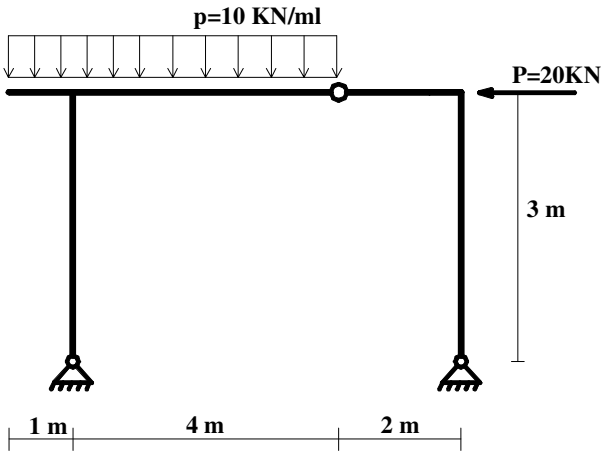


Fig. 3.15

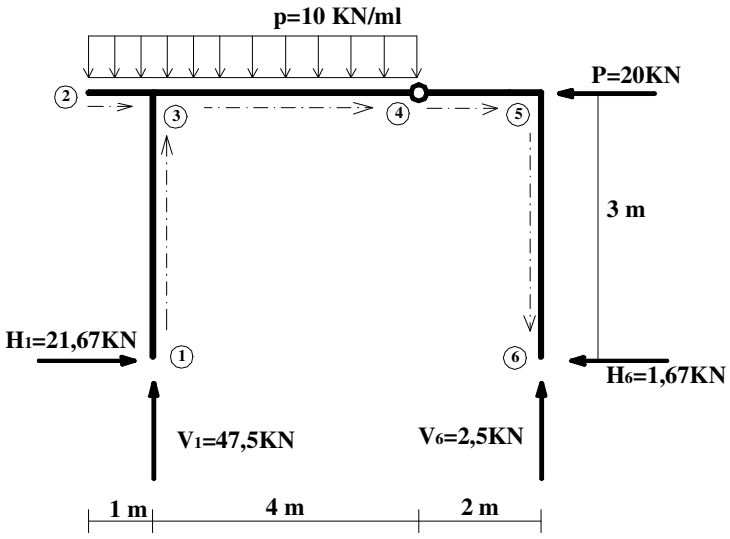


Fig. 3.16

a. Calculul reacțiunilor (Fig. 3.16)

Se observă că acest cadru este de nivel, ceea ce înseamnă că articulațiile exterioare 1 şi 6 sunt pe aceeaşi orizontală. Folosind această particularitate, reacțiunile cadrului se pot calcula evitând sistemul de ecuații după cum urmează:

$(\sum M)_6=0 \Rightarrow V_1$
$(\sum M)_1=0 \Rightarrow V_6$
Verificare: $\sum y_i = 0.$

$(\sum M)_4^{st}=0 \Rightarrow H_1$
$(\sum M)_4^{dr}=0 \Rightarrow H_6$
Verificare: $\sum x_i = 0.$

Astfel obținem:

$(\sum M)_6=0 \Rightarrow V_1 \times 6 - 10 \times 5 \times 4{,}5 - 20 \times 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 47{,}5\ KN.$
$(\sum M)_1=0 \Rightarrow -V_6 \times 6 + 10 \times 5 \times 1{,}5 - 20 \times 3 = 0 \Rightarrow V_6 = 2{,}5\ KN.$
Verificare: $\sum y_i = 47{,}5 + 2{,}5 - 10 \times 5 = 0.$

$(\sum M)_4^{st}=0 \Rightarrow -H_1 \times 3 - 10 \times 5 \times 2{,}5 + 47{,}5 \times 4 = 0 \Rightarrow H_1 = 21{,}67\ KN.$

$(\sum M)_4^{dr}=0 \Rightarrow H_6 \times 3 - 2{,}5 \times 2 = 0 \Rightarrow H_6 = 1{,}67\ KN.$

Verificare: $\sum x_i = 21{,}67 - 1{,}67 - 20 = 0.$

b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

- **Diagrama N**

Pe bara 1-3: N = ct.

$N_{1-3} = N_{3-1} = ct. = - V_1 = - 47{,}5\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 2-3: N = ct.

$N_{2-3} = N_{3-2} = 0.$

Pe bara 3-4: N = ct.

$N_{3-4} = N_{4-3} = - H_1 = - 21{,}67\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 4-5: N = ct.

$N_{4-5} = N_{5-4} = N_{4-3} = - H_1 = - 21{,}67\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 5-6: N = ct.

$N_{5-6} = N_{6-5} = - V_6 = - 2{,}5$ KN (se reprezintă JOS);

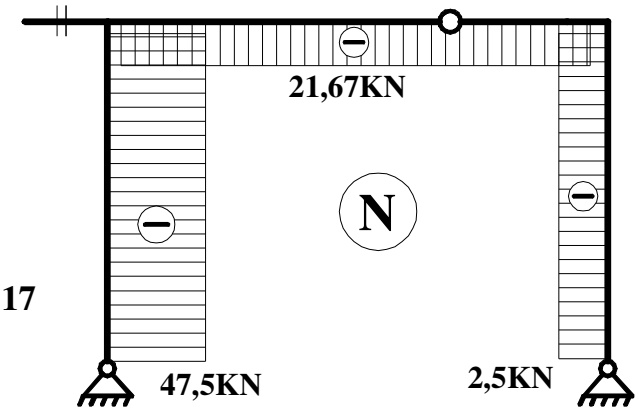


Fig. 3.17

- **Diagrama T**

Pe bara 1-3: T = ct.

$T_{1-3} = T_{3-1} = - H_1 = - 21{,}67\ KN$

(se reprezintă JOS);

Pe bara 2-3: T = liniară.

$T_{2-3} = 0$; $T_{3-2} = -10 \times 1 = - 10\ KN$;

(se reprezintă JOS).

Pe bara 3-4: forţa tăietoare este liniară.

$T_{3-4} = + V_1 - 10 \times 1 = + 47{,}5 - 10 = +37{,}5\ KN$ (se reprezintă SUS)

$T_{4-3} = T_{3-4} - 10 \times 4 = 37{,}5 - 40 = - 2{,}5\ KN$ (se reprezintă JOS);

$T_{Xo} = 0 = 37{,}5 - 10 \times x_0 \Rightarrow x_0 = 3{,}75\ m.$

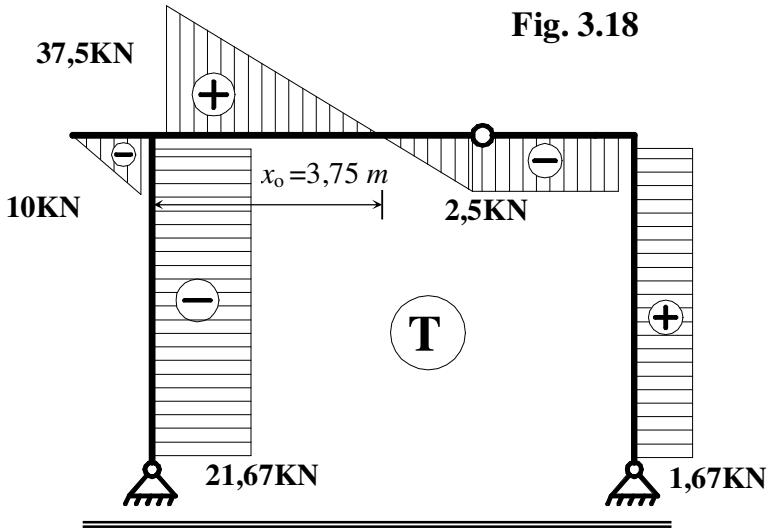
Pe bara 4-5: T = ct.

$T_{4-5} = T_{5-4} = + V_1 - 10 \times 1 = T_{4-3} = - 2{,}5\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 5-6: T = ct.

$T_{5-6} = T_{6-5} = + H_6 = 1{,}65\ KN$; (se reprezintă SUS).

Fig. 3.18



- **Diagrama M**

Pe bara 1-3: momentul încovoietor este liniar.

$M_{1-3} = 0$;

$M_{3-1} = - H_1 \times 3 = - 21{,}67 \times 3 = - 65\ KNm$;

Pe bara 2-3: momentul încovoietor variază parabolic

$M_{2-3} = 0$;

$M_{3-2} = - 10 \times 1 \times 0{,}5 = - 5\ KNm$;

(se reprezintă SUS).

Pe bara 3-4: momentul încovoietor variază parabolic

$M_{3-4} = - H_1 \times 3 - 10 \times 1 \times 5 = - 21{,}67 \times 3 - 10 \times 1 \times 5 = -70\ KNm$;

(se reprezintă SUS).

$$M_{max} = V_1 \times x_0 - H_1 \times 3 - 10 \times (1 + x_0) \times \frac{1 + x_0}{2} =$$

$$= 47{,}5 \times 3{,}75 - 21{,}67 \times 3 - 10 \times 4{,}75 \times \frac{4{,}75}{2} = 0{,}31\ KNm$$

$M_{4-3} = 0$ (articulație interioară).

Pe bara 4-5: momentul încovoietor este liniar

$M_{4-5} = 0$ (articulație interioară).

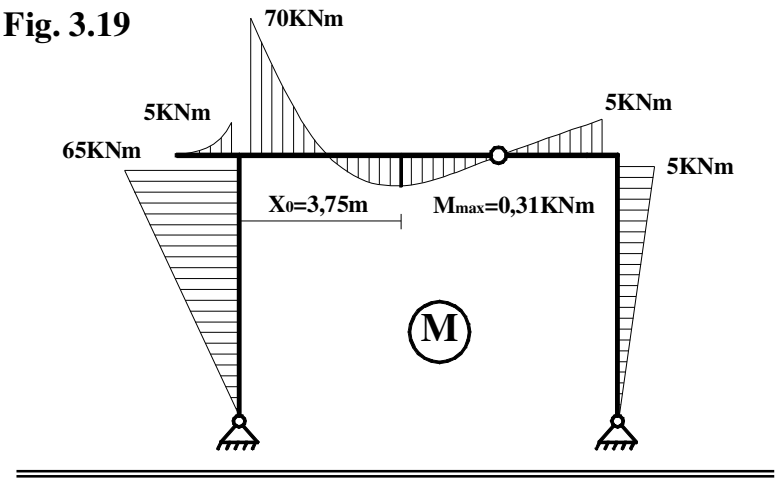
$M_{5-4} = - (H_6 \times 3) = - (+1{,}67 \times 3) = - 5\ KNm$ (s-au redus forțele de la dreapta secțiunii).

Pe bara 5-6: momentul încovoietor este liniar

$M_{5-6} = M_{5-4} = - 5\ KNm$ (prin rabatere pe nodul cu două bare)

$M_{6-5} = 0$ (articulație exterioară).

Fig. 3.19



c. Verificarea diagramelor de eforturi

- **Verificarea diagramelor N + T**

Nodul 3

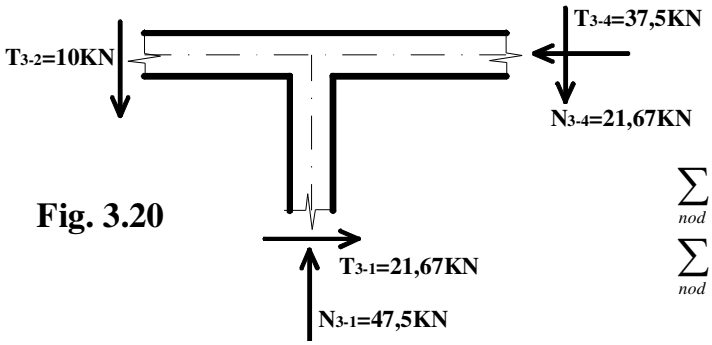
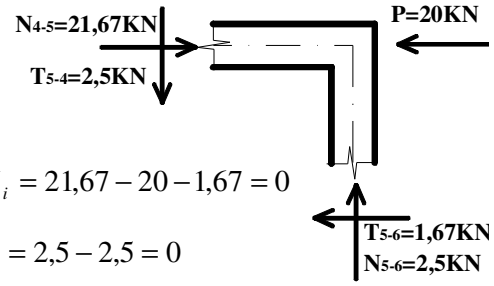


Fig. 3.20

$$\sum_{nod} X_i = 21{,}67 - 21{,}67 = 0$$

$$\sum_{nod} Y_i = 47{,}5 - 10 - 37{,}5 = 0$$

Nodul 5



$$\sum_{nod} X_i = 21{,}67 - 20 - 1{,}67 = 0$$

$$\sum_{nod} Y_i = 2{,}5 - 2{,}5 = 0$$

- ***Observaţie:***

Pentru scrierea ecuaţiilor de echilibru s-a folosit sistemul de axe ortogonale ***XOY.***

- **Verificarea diagramei de moment**

Verificarea diagramei de moment este prezentată în fig. 3.21. Se poate observa că suma momentelor care acţionează pe nodurile 3 şi 5 este zero şi deci nodurile se află în echilibru.

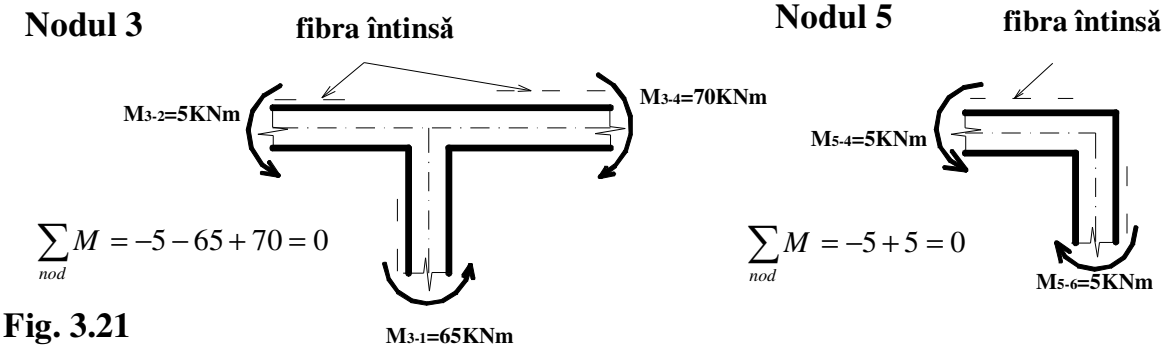


Fig. 3.21

APLICAȚIA 4

Pentru cadrul triplu articulat din fig. 3.25 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T si M:

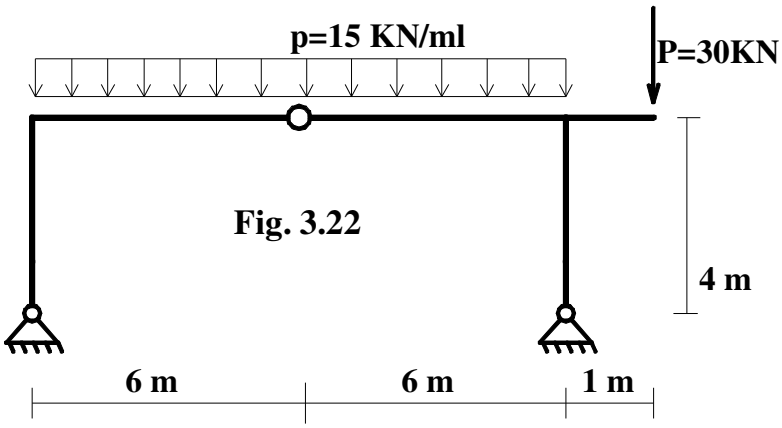


Fig. 3.22

a. Calculul reacțiunilor (Fig. 3.23)

Se incepe cu calculul reacțiunilor verticale care apoi se verifică. Urmează calculul reacțiunilor orizontale evitând în acest fel sistemul de ecuații:

$(\sum M)_6=0 \Rightarrow V_1$

$(\sum M)_1=0 \Rightarrow V_6$

Verificare: $\sum y_i = 0.$

$(\sum M)_3^{st}=0 \Rightarrow H_1$

$(\sum M)_3^{dr}=0 \Rightarrow H_6$

Verificare: $\sum x_i = 0.$

Astfel se obține:

$(\sum M)_6=0 \Rightarrow V_1 \times 12 - 15 \times 12 \times 6 + 30 \times 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 87{,}5\ KN.$

$(\sum M)_1=0 \Rightarrow - V_6 \times 12 + 30 \times 13 + 15 \times 12 \times 6 = 0 \Rightarrow V_6 = 122{,}5\ KN.$

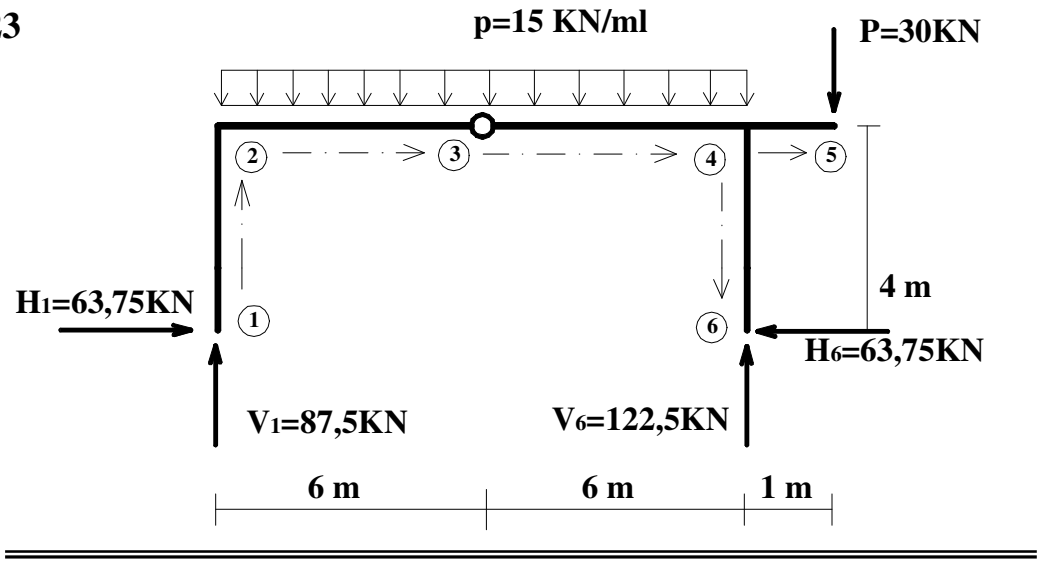
Verificare: $\sum y_i = 87{,}5 + 122{,}5 - 12 \times 15 - 30 = 0.$

$(\sum M)_3^{st}=0 \Rightarrow - H_1 \times 4 - 15 \times 6 \times 3 + 87{,}5 \times 6 = 0 \Rightarrow H_1 = 63{,}75\ KN.$

$(\sum M)_3^{dr}=0 \Rightarrow H_6 \times 4 + 30 \times 7 + 15 \times 6 \times 3 - 122{,}5 \times 6 = 0 \Rightarrow H_6 = 63{,}75\ KN.$

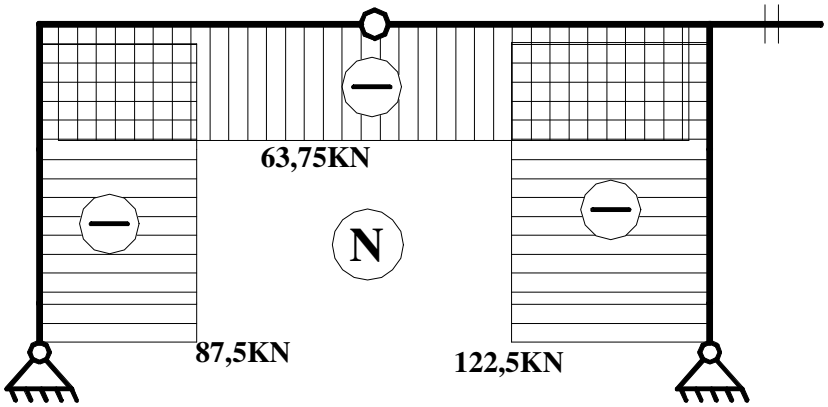
Verificare: $\sum x_i = 63{,}75 - 63{,}75 = 0.$

Fig. 3.23



b. Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Fig. 3.24



- **Diagrama N**

Pe bara 1-2: N = ct.
$N_{1-2} = N_{2-1} = ct. = - V_1 = - 87,5\ KN$
(se reprezintă JOS);

Pe bara 2-3: N = ct.
$N_{2-3} = N_{3-2} = - H_1 = - 63,75\ KN$
(se reprezintă JOS); .

Pe bara 3-4: N = ct.
$N_{3-4} = N_{4-3} = - H_1 = - 63,75\ KN$
(se reprezintă JOS);

Pe bara 4-5: N = ct.
$N_{4-5} = N_{5-4} = 0\ KN$ (au fost reduse forțele de la DR secțiunii);

Pe bara 4-6: N = ct.
$N_{4-6} = N_{6-4} = - V_6 = - 122,5\ KN$ (au fost reduse forțele de la DR secțiunii; se reprezintă JOS);

- **Diagrama T**

Pe bara 1-2: T = ct.
$T_{1-2} = T_{2-1} = - H_1 = - 63,75\ KN$ (se reprezintă JOS);

Pe bara 2-3: T = liniară.
$T_{2-3} = + V_1 = +87,5\ KN$ (se reprezintă SUS);
$T_{3-2} = T_{2-3} - 15 \times 6 = + 87,5 - 90 = - 2,5\ KN$; (se reprezintă JOS).

$T_{x_0} = 0 \Rightarrow 87{,}5 - 15 \times x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 5{,}83m$

Pe bara 3-4: T = liniară.

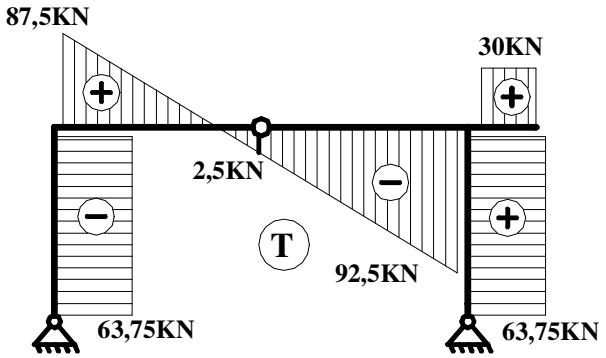
$T_{3-4} = T_{3-2} = -2{,}5\ KN$; (se reprezintă JOS)

$T_{4-3} = T_{3-4} - 15 \times 6 = -2{,}5 - 90 = -2{,}5\ KN$
(se reprezintă JOS);

Pe bara 4-5: T = ct.

$T_{4-5} = T_{5-4} = +P = +30\ KN$
(s-au redus forțele de la DR secțiunii;
se reprezintă SUS);

Fig. 3.25



Pe bara 4-6: T = ct.

$T_{4-6} = T_{6-4} = +H_6 = +63{,}75\ KN$; (s-au redus forțele de la DR secțiunii; se reprezintă SUS).

- **Diagrama M**

Pe bara 1-2: momentul încovoietor este liniar.

$M_{1-2} = 0$;

$M_{2-1} = -H_1 \times 4 = -63{,}75 \times 4 = -255\ KNm$;

Pe bara 2-3: momentul încovoietor variază parabolic având un maxim pozitiv în punctul de anulare al forței tăietoare

$M_{2-3} = M_{2-1} = -255\ KNm$ (din rabatere pe nodul cu două bare);

$$M_{max} = V_1 \times x_0 - H_1 \times 4 - p \times x_0 \times \frac{x_0}{2} =$$

$$= 87{,}5 \times 5{,}83 - 63{,}75 \times 4 - 15 \times 5{,}83 \times \frac{5{,}83}{2} = 0{,}208\ KNm$$

(se reprezintă JOS)

$M_{3-2} = 0\ KNm$; (articulație interioară).

Pe bara 3-4: momentul încovoietor variază parabolic

$M_{3-4} = 0\ KNm$;

$M_{4-3} = -(P \times 1 + H_6 \times 4) = -(30 \times 1 + 63{,}75 \times 4) = -285\ KNm$;
(se reprezintă SUS)

Pe bara 4-5: momentul încovoietor variază liniar

$M_{4-5} = -(P \times 1) = -(30 \times 1) = -30\ KNm$ (au fost reduse forțele de la DR secțiunii).

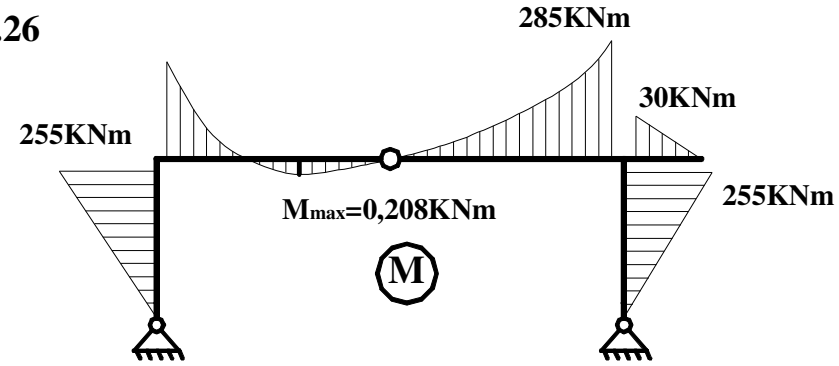
$M_{5-4} = 0$

Pe bara 4-6: momentul încovoietor variază liniar

$M_{4-6} = -(H_6 \times 4) = -(63{,}75 \times 4) = -255\ KNm$ (se reprezintă SUS);

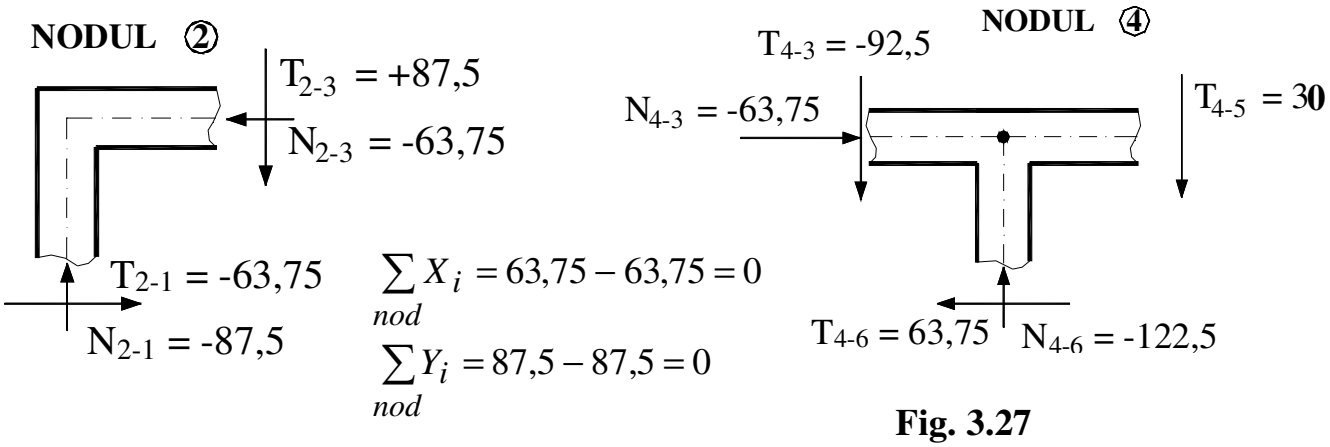
$M_{6-4} = 0$ (articulație exterioară).

Fig. 3.26



c. Verificarea diagramelor de eforturi

Verificare **N + T (fig. 3.27)**

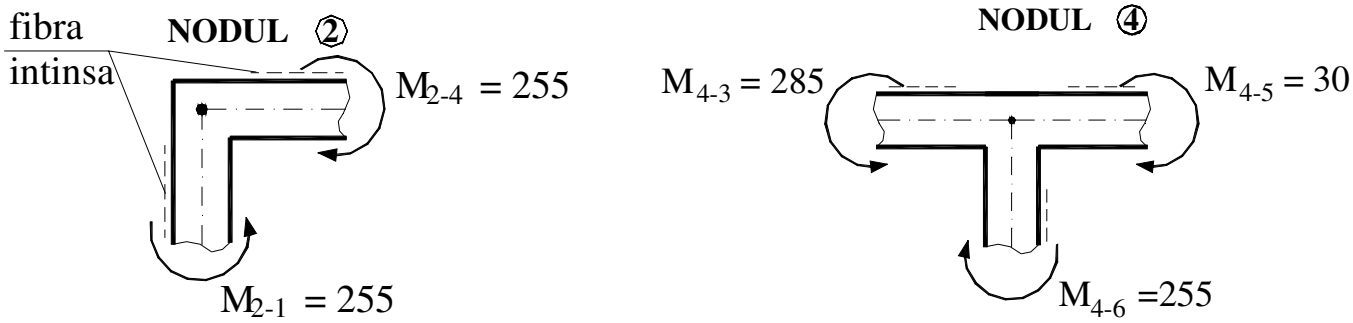


$$\sum_{nod} X_i = 63{,}75 - 63{,}75 = 0$$

$$\sum_{nod} Y_i = 87{,}5 - 87{,}5 = 0$$

Fig. 3.27

Verificare **M (fig. 3.28)**



$$\sum_{nod} M = -255 + 255 = 0$$

Fig. 3.28

$$\sum_{nod} M = -285 + 255 + 30 = 0$$

B. CADRE COMPUSE

Cadrele compuse sunt alcătuite din mai multe cadre simple, numite unități structurale. Unitățile structurale din cadrele compuse joacă rolul de părți principale **P.P** sau părți secundare **P.S.** Părțile principale au invariabilitate geometrică proprie, preluând singure încărcările care le revin. Părțile secundare devin invariabile geometric sprijinind pe alte părți ale structurii sau şi pe baza de sprijin. Ele transmit încărcările direct aplicate pe parcursul lor părților de structură pe care se sprijină.

APLICAȚIA 1

Pentru cadrul compus din **(Fig. 3.29)** se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M:

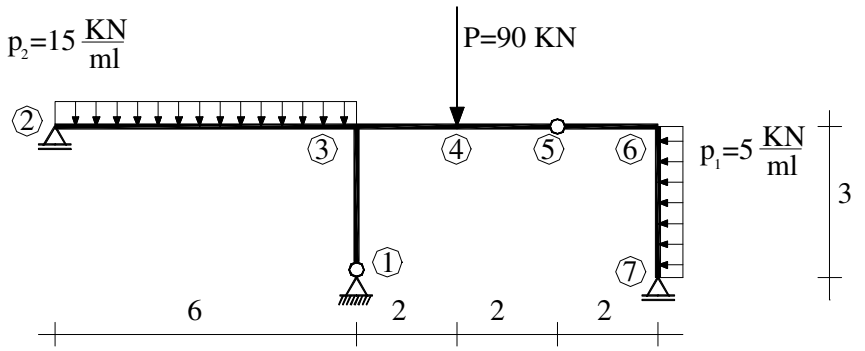


Fig. 3.29

Cadrul compus din **Fig. 3.29** are o parte principală, cadrul simplu rezemat **1..5** şi o parte secundară, cadrul simplu rezemat **5-6-7**. Se observă că partea secundară sprijină pe teren prin reazemul simplu **7** şi pe partea principală în articulația interioară **5**. Rezolvarea se începe cu partea secundară, partea principală fiind posibil de abordat după ce se cunosc interacțiunile din articulația interioară **5**.

Rezolvarea părții secundare

a. Calculul reacțiunilor (Fig. 3.30)

$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_5 - 5 \cdot 3 = 0 \quad H_5 = 15\ KN$

$(\Sigma M)_5 = 0 \Rightarrow -V_7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$

$V_7 = 11{,}25 KN$

$(\Sigma M)_7 = 0 \Rightarrow -V_5 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$

$V_5 = 11{,}25 KN$

Verificare: $\Sigma Y_i = -11{,}25 + 11{,}25 = 0$

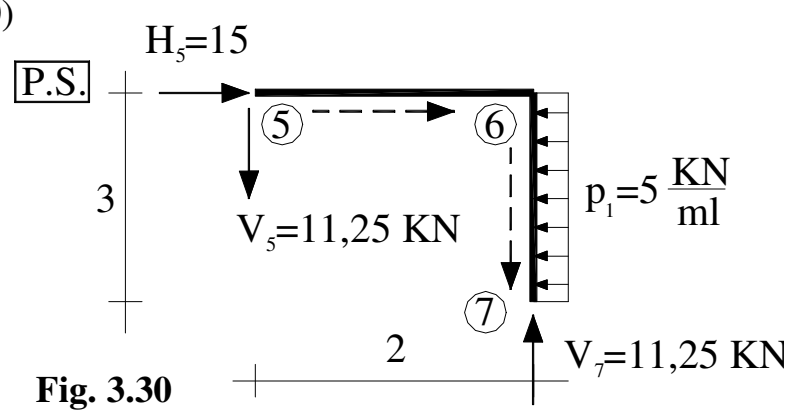


Fig. 3.30

a. Calculul diagramelor de eforturi:

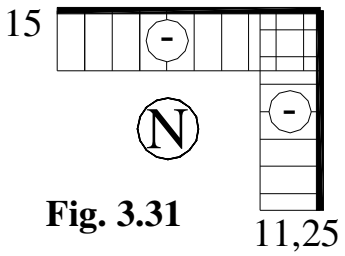


Fig. 3.31

- **Calculul diagramei N (Fig. 3.31)**

După ce s-a ales sensul de parcurgere pe fiecare bară se observă că:

Pe bara 5-6: N = ct

$N_{5-6} = N_{6-5} = -H_5 = -15$ KN (se reprezintă **JOS**)

Pe bara 6-7 cu încărcare uniform distribuită: N = ct

$N_{6-7} = N_{7-6} = -V_7 = -11,25$ KN (se reprezintă **JOS**)

- **Calculul diagramei T (Fig. 3.32)**

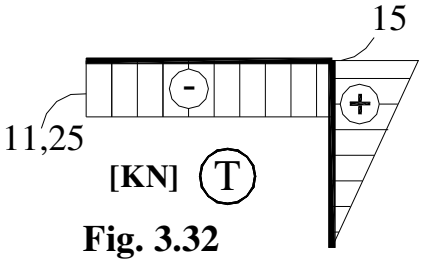


Fig. 3.32

Pe bara 5-6 forța tăietoare este constantă.

$T_{5-6} = T_{6-5} = -V_5 = -11,25$ KN (se reprezintă **JOS**)

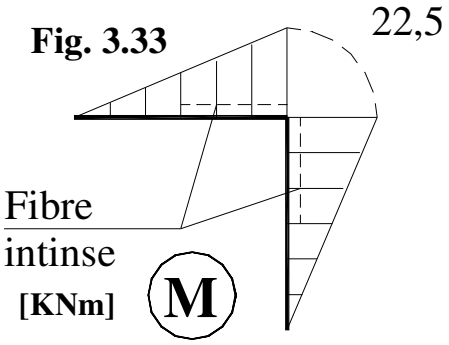
Pe bara 6-7 forța tăietoare este liniară:

$T_{6-7} = 5 \cdot 3 = 15$ KN (se reprezintă **SUS**)

$T_{7-6} = 0$

- **Calculul diagramei M (fig. 3.33)**

Fig. 3.33



Pe bara 5-6 momentul încovoietor este liniar:

$M_{5-6} = 0$;

$M_{6-5} = -V_5 \cdot 2 = -11,25 \cdot 2 = -22,5 KNm$

(se reprezintă **SUS**)

Pe bara 6-7 momentul incovoietor variază parabolic:

$M_{6-7} = M_{6-5} = -22,5 KNm$

$M_{7-6} = 0$

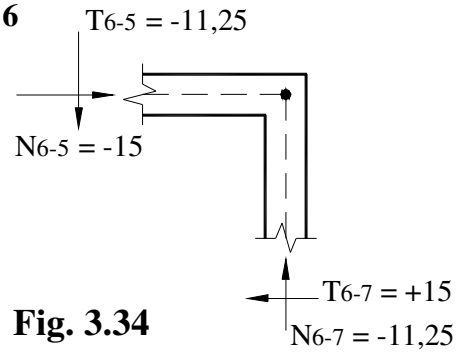
Observație:

*În nodul **6**, nod cu două bare, momentul se rabate având grijă ca nodul să rămână în echilibru (ambele fibre întinse sunt la exterior).*

c. Verificarea diagramelor (Fig. 3.34)

Se verifică diagramele **N** şi **T** utilizând ecuaţiile de echilibru pentru nodul **6**.

NODUL 6



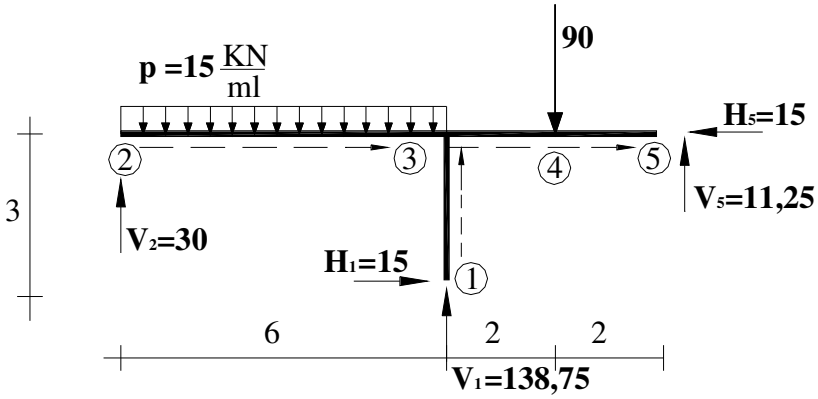
$$\begin{cases} \sum\limits_{nod} X_i = +15 - 15 = 0 \\ \sum\limits_{nod} Y_i = -11{,}25 + 11{,}25 = 0 \end{cases}$$

Fig. 3.34

Rezolvarea părţii principale

a. Calculul reacţiunilor (Fig. 3.35)

Fig. 3.35



Se observă că în secţiunea 5 acţionează forţele de legătură interioare $\mathbf{H_5}$ şi $\mathbf{V_5}$, calculate anterior, dar cu sens schimbat.

$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_1 - 15 = 0 \Rightarrow H_1 = 15KN$

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_2 \cdot 2 - 15 \cdot 6 \cdot 3 + 90 \cdot 2 - 15 \cdot 3 - 11{,}25 \cdot 4 = 0 \qquad V_2 = 30KN$

$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_1 \cdot 6 - 15 \cdot 3 + 15 \cdot 6 \cdot 3 + 90 \cdot 8 - 11{,}25 \cdot 10 = 0 \quad V_1 = 138{,}75KN$

Verificare: $\sum Y_i = 30 + 138{,}75 + 11{,}25 - 15 \cdot 6 - 90 = 0$

b. Calculul si trasarea diagramelor de eforturi

▪ Diagrama N (Fig. 3.36)

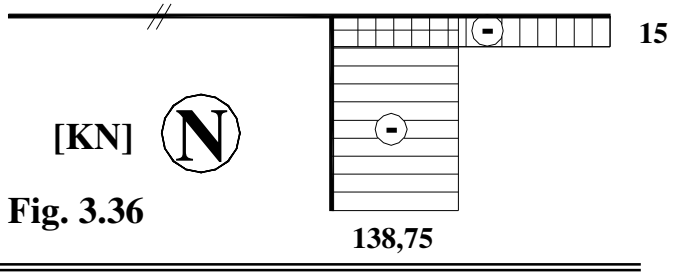


Fig. 3.36

După alegerea sensului de parcurgere pe fiecare bară se observă că:

Pe bara **1-3**: *N=ct.*

$$N_{1-3} = N_{3-1} = -V_1 = -138{,}5$$

(se reprezintă **JOS**)

Pe bara 2-3**,** cu forță uniform distribuită între capete: *N=ct.*

$$N_{2-3-} = N_{3-2} = 0$$

Pe bara 3-4-5, cu forță concentrată verticală între capete: *N=ct.*

$$N_{3-5} = N_{5-3} = -H_5 = -15KN$$ (se reprezintă **JOS**)

▪ Diagrama T (Fig. 3.37)

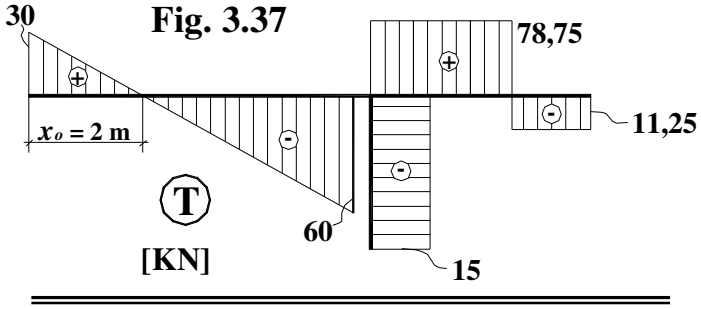


Fig. 3.37

Pe bara 1-3 forța tăietoare este constantă:

$$T_{1-3} = T_{3-1} = -H_1 = -15KN$$

(se reprezintă **JOS**)

Pe bara 2-3 forța tăietoare este liniară:

$$T_{2-3} = +V_2 = +30KN$$

$$T_{3-2} = +V_2 - 15 \cdot 6 = 30 - 90 = -60KN$$

$$T_{Xo} = 0 \Rightarrow 30 - 15 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2m$$

Pe bara 3-4-5 forța tăietoare este constantă pe porțiuni, cu un salt în direcția şi de marimea forței concentrate P = 90 KN:

$T_{3-4} = T_{4-3} = +90 - V_5 = 90 - 11{,}25 = 78{,}75KN$ (au fost reduse forțele de la **DR** secțiunii)

▪ Diagrama M (Fig.3.38)

Pe bara 1-3 momentul incovoietor este liniar:

$M_{1-3} = 0;$

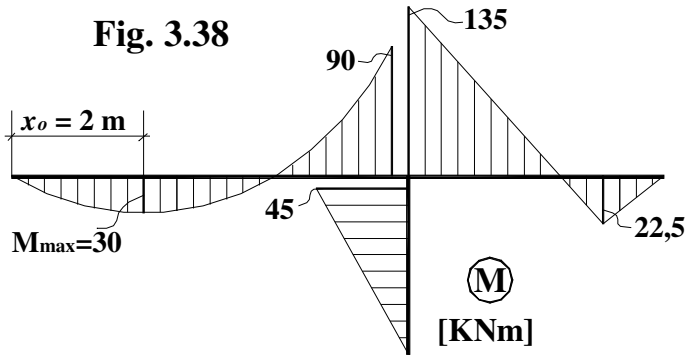
$M_{3-1} = -H_1 \cdot 3 = -15 \cdot 3 = -45$ KNm (se reprezintă **SUS**).

Pe bara 2-3 momentul încovoietor variază parabolic având o valoare maximă pozitivă în punctul de anulare al forței tăietoare ($x_0 = 2m$):

$M_{2-3} = 0;\ M_{3-2} = V_2 \cdot 6 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 30 \cdot 6 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = -90 KNm$ (se reprezintă **SUS**)

$M_{\max} = 30 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 30 KNm$

Fig. 3.38



Pe bara 3-4-5 momentul încovoietor este poligonal, având un vârf în sensul forței concentrate P = 90 KN:

$M_{3-5} = -(90 \cdot 2 - 11{,}25 \cdot 4) = -135 KNm$ (au fost reduse forțele de la **DR** secțiunii)

$M_5 = -(-V_5 \cdot 2) = +11{,}25 \cdot 2 = +22{,}5 KN$ (se reprezintă **JOS**)

c. Verificarea diagramelor

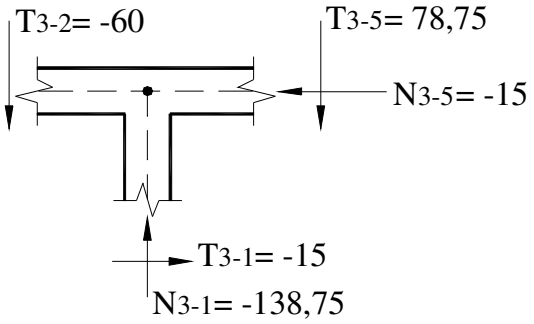
Verificarea diagramelor N + T (Fig. 3.39)

Fig. 3.39

NODUL 3

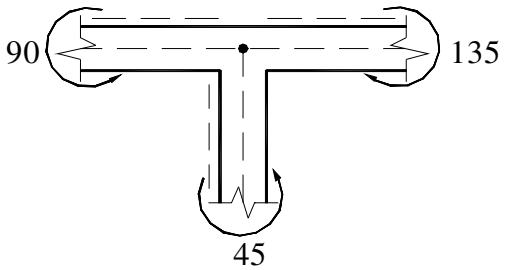
$\sum_{nod} X_i = +15 - 15 = 0$

$\sum_{nod} Y_i = 138{,}75 - 60 - 78{,}75 = 0$



Verificarea diagramei M (Fig. 3.40)

NODUL 3



$\sum_{nod} M = -90 - 45 + 135 = 0$

Fig. 3.40

După calculul şi verificarea diagramelor pe părţile componente ale structurii se trasează diagramele finale pe intreagă structură prin simpla alăturare **(Fig.3.41)**.

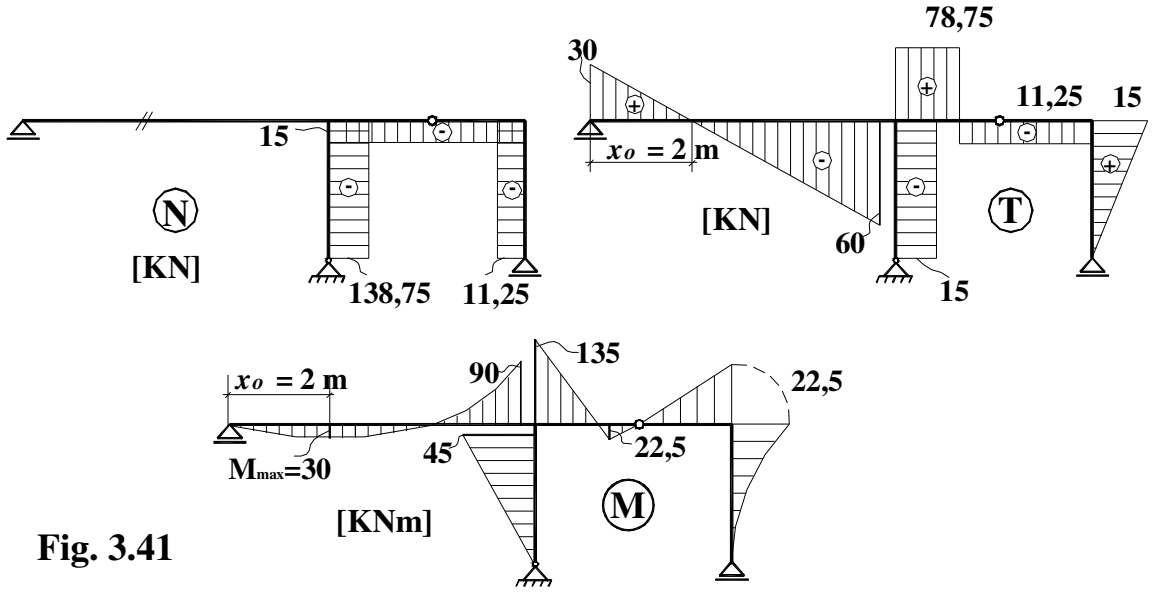


Fig. 3.41

APLICAŢIA 2

Pentru cadrul compus din **Fig 3.42** se cere calculul reacţiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M:

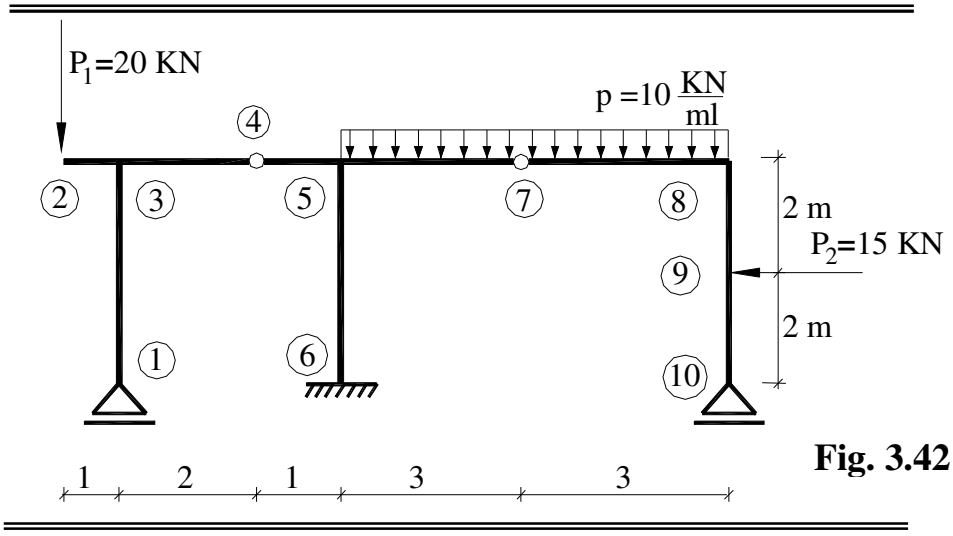


Fig. 3.42

Se observă că structura din **Fig. 3.42** are trei părţi componente:

- partea principală **4-5-6-7**, cadru consolă
- părţile secundare **1-2-3-4** şi **7-8-9-10**, cadre simplu rezemate.

Într-o schemă simplă de principiu (**Fig 3.47**) se arată rolul fiecărei părți de structură:

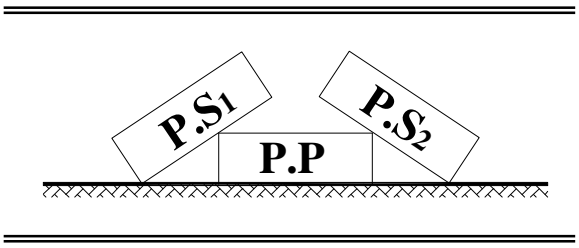


Fig. 3.43

Se începe rezolvarea cu partea secundară **P.S$_1$:**

a) Calculul reacțiunilor (Fig. 3.44)

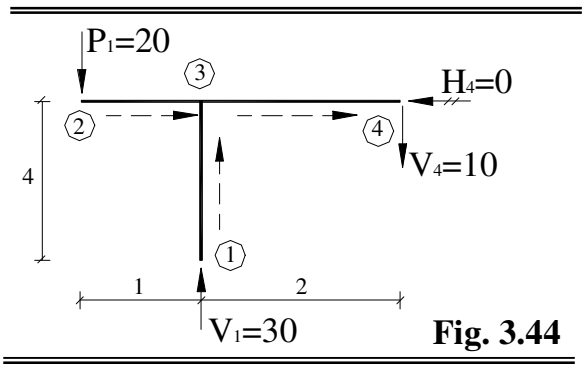


Fig. 3.44

$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_4 = 0$

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_4 \cdot 2 - 20 \cdot 1 = 0 \Rightarrow V_4 = 10KN$

$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 2 - 20 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 30KN$

Verificare: $\sum Y_i = 30 - 20 - 10 = 0$

b) Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Diagrama N (Fig. 3.45)

- pe bara **1-3**, fără încărcare între capete , *N*= *ct*.

  $N_{3-1} = N_{1-3} = -V_1 = -30KN$ (se reprezintă **JOS**)

- pe bara **2-3** , fără încărcare între capete, *N*= *ct*.

  $N_{2-3} = N_{3-2} = 0$

- pe bara **3-4** de asemenea, *N*= *ct*.

  $N_{3-4} = N_{4-3} = 0$

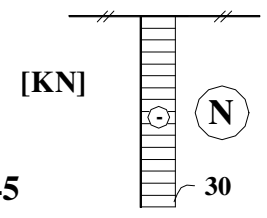


Fig. 3.45

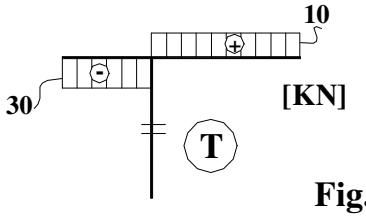


Fig. 3.46

Diagrama T (Fig. 3.46)

- pe bara **1-3** forța tăietoare este constantă:
$$T_{1-3} = T_{3-1} = 0$$

- pe bara **2-3** forța tăietoare este de asemenea constantă:
$$T_{2-3} = T_{3-2} = -P_1 = -20KN$$ (se reprezintă **JOS**)

- pe bara **3-4** forța tăietoare este constantă:
$$T_{3-4} = T_{4-3} = +V_4 = +10KN$$ (se reprezintă **SUS**)

Diagrama M (Fig. 3.47)

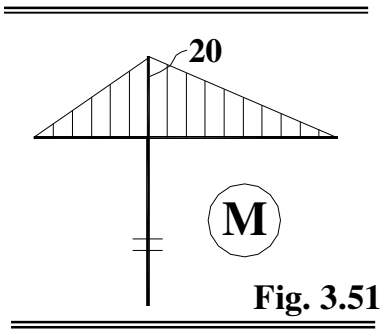


Fig. 3.51

- pe bara **1-3** momentul încovoietor este constant:
$$M_{1-3} = 0; \qquad M_{3-1} = 0$$

- pe bara **2-3** momentul încovoietor este liniar:
$$M_{2-3} = 0; \qquad M_{3-2} = -20 \cdot 1 = -20KN \cdot m$$
(se reprezintă **JOS**)

- pe bara **3-4** momentul încovoietor este tot liniar:
$$M_{3-4} = -(10 \cdot 2) = -20KNm; \qquad M_{4-3} = 0$$

c) Verificarea diagramelor:

Verificarea diagramelor **N + T (Fig, 3.48.a)**

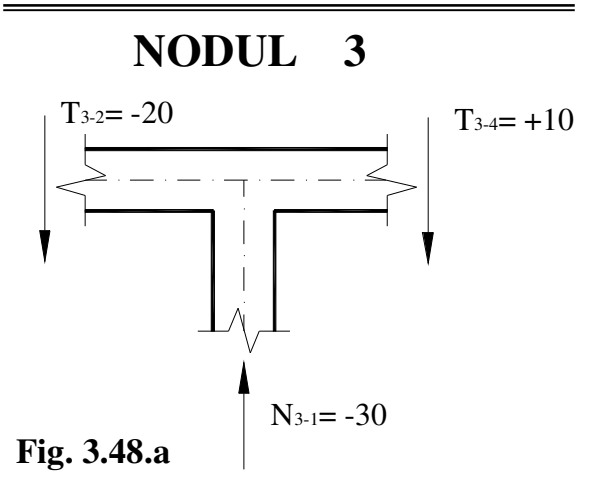


Fig. 3.48.a

$$\sum_{nod} Y_i = +30 - 20 - 10 = 0$$
$$\sum_{nod} X_i = 0$$

Verificarea diagramei M (Fig. 3.48.b)

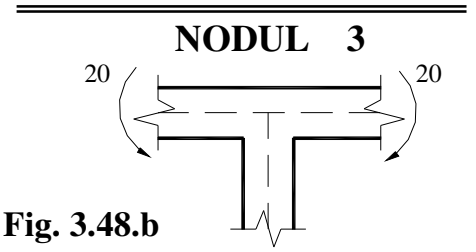


Fig. 3.48.b

$$\sum_{nod} M = -20 + 20 = 0$$

Rezolvarea părții secundare P.S$_2$.

Calculul reacțiunilor (Fig. 3.49)

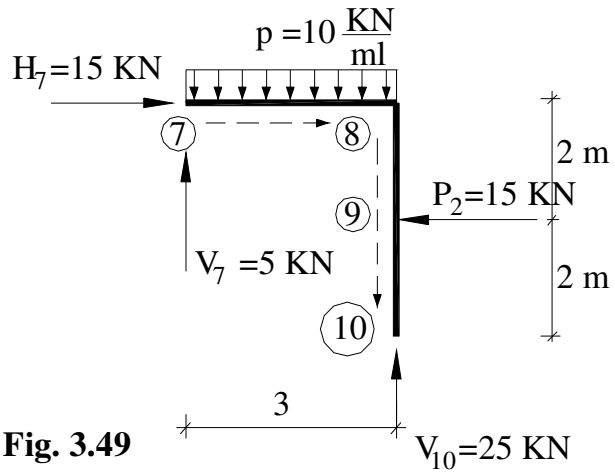


Fig. 3.49

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_7 - 15 = 0 \Rightarrow H_7 = 15KN$$

$$(\sum M)_{10} = 0 \Rightarrow V_7 \cdot 3 + 15 \cdot 4 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 15 \cdot 2 = 0$$

$$V_7 = 5KN$$

$$(\sum M)_7 = 0 \Rightarrow -V_{10} \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$V_{10} = 25KN$$

Verificare: $\sum Y_i = 5 = 25 - 10 \cdot 3 = 0$

$\sum X_i = +15 - 15 = 0$

Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Diagrama N (Fig. 3.50)

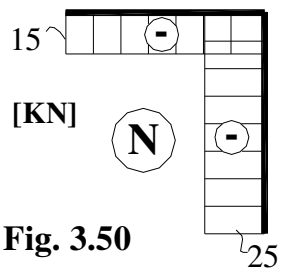


Fig. 3.50

- Pe bara **7-8** observăm că: $N = ct$

  $N_{7\text{-}8} = N_{8\text{-}7} = -H_7 = -15\ KN$ (se reprezintă **JOS**)

- Pe bara **8-9-10**, cu forță concentrată între capete avem:

  $N = ct$ $N_{8\text{-}10} = N_{10\text{-}8} = -V_{10} = -25\ KN$ (se reprezintă **JOS**)

Diagrama T (Fig. 3.51)

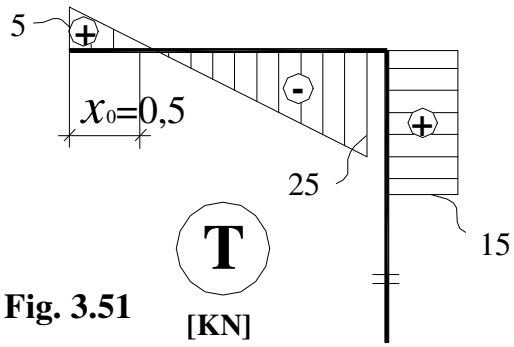


Fig. 3.51

- pe bara **7-8** forța tăietoare este liniară:

$T_{7-8} = +V_7 = +5KN$ (se reprezintă **SUS**)

$T_{8-7} = V_7 - 10 \cdot 3 = 5 - 30 = -25KN$ (se reprezintă **JOS**)

$T_{x_0} = 0 \Rightarrow 5 - 10 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0{,}5m$

- pe bara **8-9-10** forța tăietoare este constantă pe porțiuni:

$T_{8-9} = T_{9-8} = H_7 = 15KN$ (se reprezintă **SUS**)

$T_{9-10} = T_{10-9} = T_{8-9} - P_2 = 15 - 15 = 0$

Diagrama M (Fig. 3.52)

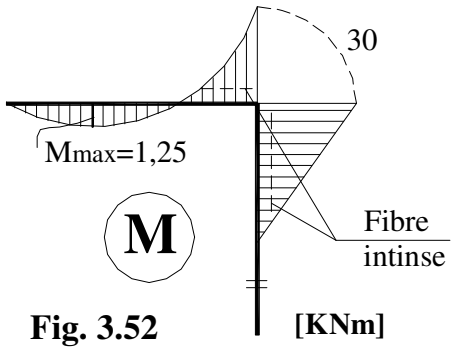


Fig. 3.52

- pe bara **7-8** momentul încovoietor variază parabolic:

$M_{7-8} = 0;$

$M_{8-7} = V_7 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 5 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = -30KNm$

(se reprezintă **SUS**)

$M_{\max} = V_7 \cdot x_0 - 10 \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} = 5 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{0{,}5}{2} = 1{,}25KNm$

(se reprezintă **JOS**)

- pe bara **8-9-10** se observă că există porțiunea **9-10** pe care forța tăietoare este nulă. Rezultă că pe această porțiune momentul încovoietor va fi constant:

$\frac{dM}{dx} = T = 0 \Rightarrow M = ct$

$M_{8-9} = M_{8-7} = -30KNm$ (momentul poate fi obținut prin rabatere fiind vorba de nod rigid cu două bare)

$M_{9-10} = M_{10-9} = 0$

Verificarea diagramelor

Verificarea diagramelor N + T (Fig. 3.53)

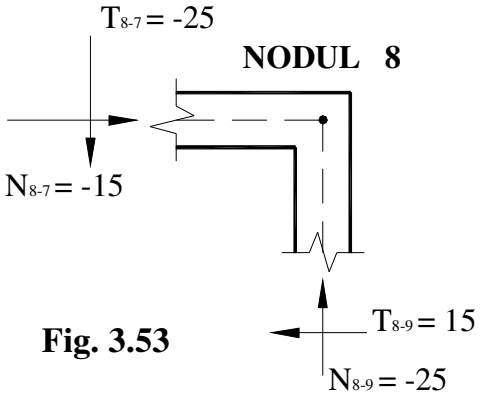


Fig. 3.53

$$\sum_{nod} X_i = 15 - 15 = 0$$
$$\sum_{nod} Y_i = 25 - 25 = 0$$

Verificarea diagramei **M** se poate face verificând rabaterea momentului încovoietor în nodul rigid cu două bare 8. Astfel se observă că fibrele întinse sunt amândouă la exterior, deci nodul este în echilibru.

Rezolvarea părții principale P.P.

Calculul reacțiunilor (Fig. 3.54)

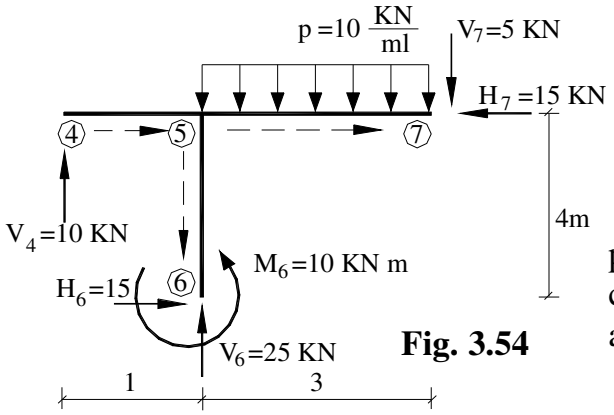


Fig. 3.54

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_6 - 15 = 0 \Rightarrow H_6 = 15KN$$
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow V_6 + 10 - 10 \cdot 3 - 5 = 0 \Rightarrow V_6 = 25KN$$

Se observă că pe partea principală acționează cu semn contrar interacțiunile calculate anterior din secțiunile **4** și **7.**

$$(\sum M)_6 = 0 \Rightarrow -M_6 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 3 - 15 \cdot 4 = 0 \qquad M_6 = 10KNm$$

Verificare: $(\sum M)_7 = -10 + 25 \cdot 3 - 15 \cdot 4 + 10 \cdot 4 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$

b) Calculul şi trasarea diagramelor de eforturi

Diagrama N (Fig. 3.55)

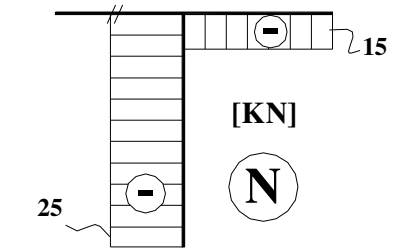


Fig. 3.55

- pe bara **4-5**, fără încărcare între capete, se observă că: *N=ct*.

$$N_{4-5} = N_{5-4} = 0$$

- pe bara **5-6** de asemenea: *N=ct*.

$$N_{5-6} = N_{6-5} = -V_6 = -25KN$$

(se reprezintă **JOS**)

- pe bara **5-7,** cu forța uniform distribuită între capete: *N=ct*.

$N_{5-7} = N_{7-5} = -H_7 = -15KN$ (se reprezintă **JOS**)

Diagrama T (Fig. 3.56)

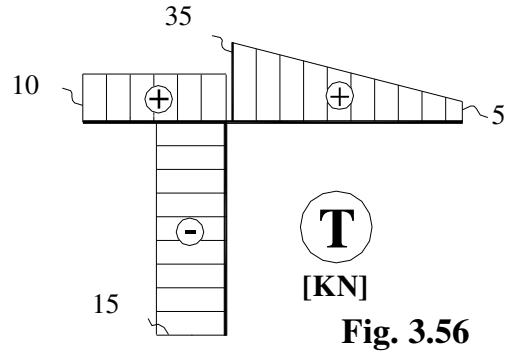


Fig. 3.56

- pe bara **4-5** forța tăietoare este constantă:

$T_{4-5} = T_{5-4} = +V_4 = 10KN$

(se reprezintă **SUS**)

- pe bara **5-6** forța tăietoare este de asemenea constantă:

$T_{5-6} = T_{6-5} = -H_6 = -15KN$

(se reprezintă **JOS**)

- pe bara **5-7** forța tăietoare este liniară:

$$T_{5-7} = V_6 + V_{10} = 25 + 10 = 35KN$$

$T_{7-5} = T_{5-7} - 10 \cdot 3 = +V_7 = 5KN$ (se reprezintă **SUS**)

Diagrama M (Fig. 3.57)

- pe bara **4-5** momentul încovoietor este liniar:

$M_{4-5} = 0;$

$M_{5-4} = V_4 \cdot 1 = 10KNm$ (se reprezintă **JOS**)

- pe bara **5-6** momentul încovoietor este liniar (T=ct):

$M_{5-6} = -(H_6 \cdot 4 - M_6) = -(15 \cdot 4 - 10) = +70KNm$

(au fost reduse forțele de la **DR.** secțiunii)

$M_{6-5} = -(-M_6) = +10KNm$

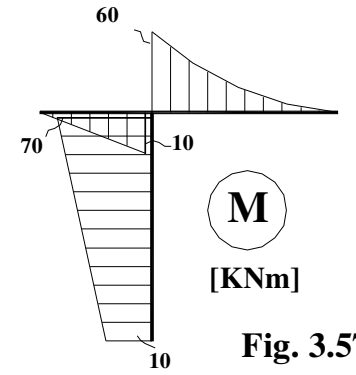


Fig. 3.57

- pe bara **5-7** momentul încovoietor este parabolic ($T \rightarrow$ liniar):

$M_{5-7} = -(10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + V_7 \cdot 3) = -(45 + 5 \cdot 3) = -60 KNm$

(au fost reduse forțele de la **DR.** secțiunii)

$M_{7-5} = 0$

Verificarea diagramelor

Verificarea diagramelor N +T (Fig. 3.58)

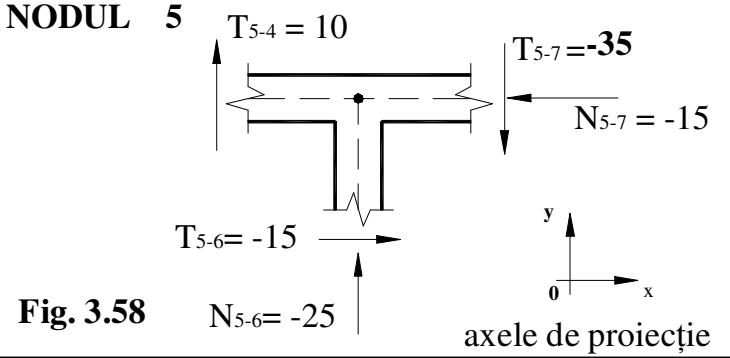


Fig. 3.58

$\sum_{nod} X_i = 15 - 15 = 0$

$\sum_{nod} Y_i = 25 + 10 - 35 = 0$

Verificarea diagramei M (Fig. 3.59)

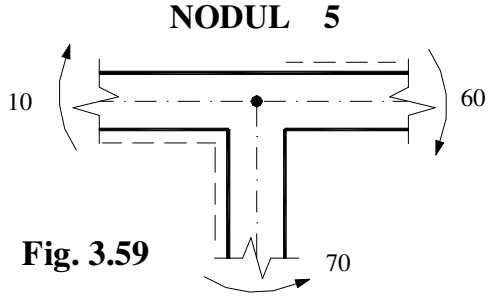


Fig. 3.59

$\sum_{nod} M = 10 + 60 - 70 = 0$

Diagramele pe structura compusă se trasează prin alăturarea diagramelor parțiale obținute pe părțile componente **(Fig. 3.60)**

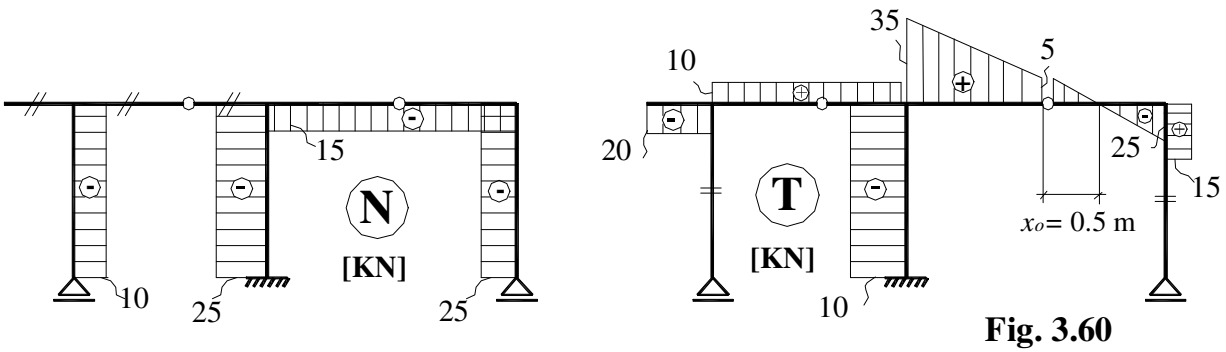
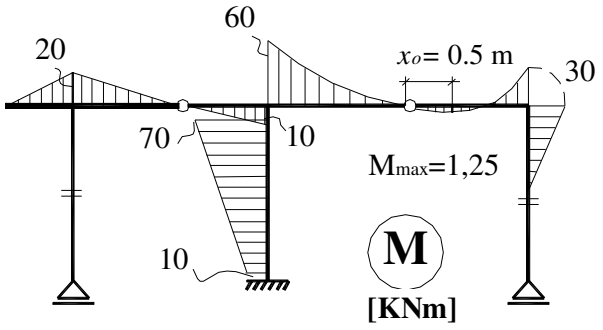


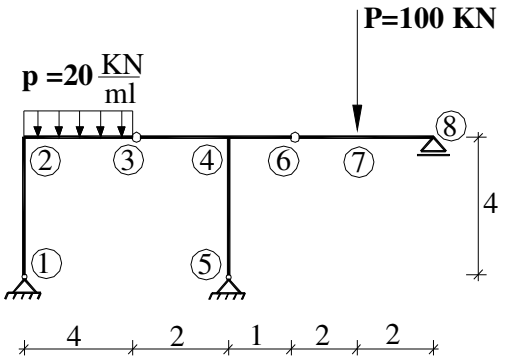
Fig. 3.60

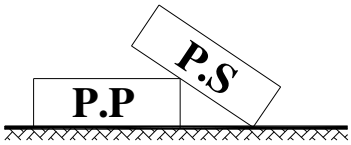
Fig. 3.60



APLICAȚIA 3

Pentru cadrul compus din **Fig. 3.61** se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M.





Schemă de principiu

Fig. 3.61

Se observă că structura compusă din **Fig. 3.61** are o parte principală triplu articulată (porțiunea **1-2…6**) şi o parte secundară, grindă simplu rezemată (porțiunea **6-7-8**). Rezolvarea se începe cu partea secundară, grinda simplu rezemată.

Rezolvarea partii secundare P.S.

a) Calculul reacțiunilor (Fig. 3.62)

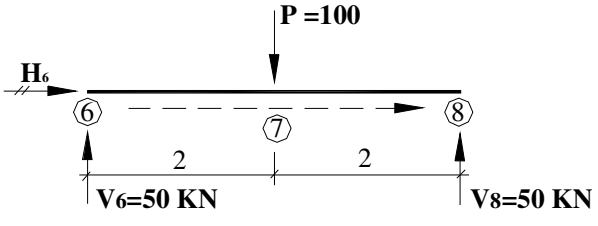


Fig. 3.62

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_6 = 0$$

$$(\sum M)_8 = 0 \Rightarrow V_6 \cdot 4 - 100 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_6 = V_8 = 50\,KN$$

b) Calculul si trasarea diagramelor de eforturi:

Diagrama N (Fig. 3.63)

Se observă că pe grinda acționează numai forțe verticale, deci **N=0**.

Diagrama T (Fig. 3.63)

Forța tăietoare pe bară este constantă pe porțiuni având un salt de marimea forței concentrate P = 100 KN.

$$T_{6-7} = T_{7-6} = V_6 = 50KN$$
$$T_{7-8} = T_{8-7} = 50 - P = -50KN$$

Diagrama M (Fig. 3.63)

Momentul încovoietor variază liniar pe grindă având un vârf în secțiunea **7** unde acționează forța **P**.

$$M_{6-7} = 0; \qquad M_{7-6} = V_6 \cdot 2 = 50 \cdot 2 = 100KN; \qquad M_{8-7} = 0$$

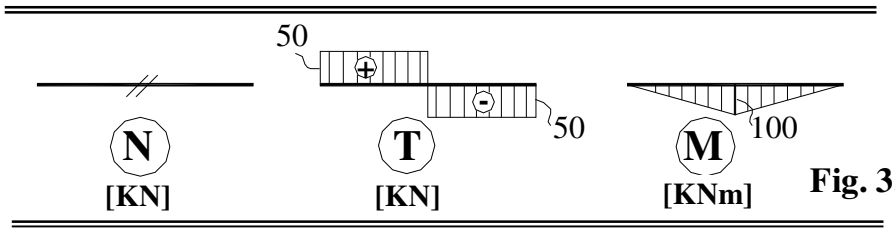


Fig. 3.63

Rezolvarea părții principale P.P.

a) Calculul reacțiunilor (Fig. 3.64)

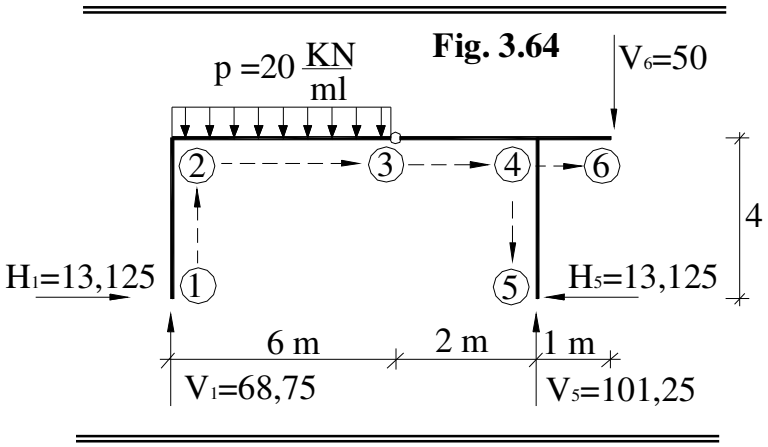


Fig. 3.64

Pe partea principală acționează reacțiunea verticală $V_6 = 50\,KN$, calculată anterior, având sensul schimbat.

Calculul reacțiunilor verticale :

$$(\sum M)_5 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 8 - 20 \cdot 6 \cdot 5 + 50 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \qquad V_1 = 68{,}75KN$$
$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_5 \cdot 8 + 50 \cdot 9 + 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \qquad V_5 = 101{,}25KN$$

Verificare: $\sum Y_i = 68{,}75 + 101{,}25 - 20 \cdot 6 - 50 = 0$

Calculul reacțiunilor orizontale:

$$(\sum M)_3^{st} = 0 \Rightarrow -H_1 \cdot 4 + 68{,}75 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow H_1 = 13{,}125KN$$
$$(\sum M)_3^{dr} = 0 \Rightarrow H_5 \cdot 4 - 101{,}25 \cdot 2 + 50 \cdot 3 = 0 \Rightarrow H_5 = 13{,}125KN$$

Verificare: $\sum X_i = 13{,}125 - 13{,}125 = 0$

b) Calculul si trasarea diagramelor de eforturi

Diagrama N (Fig. 3.65)

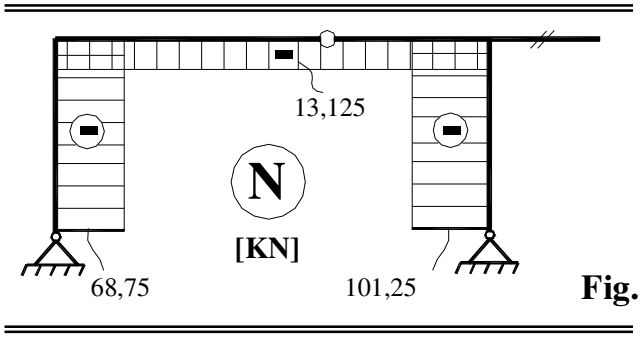


Fig. 3.65

Pe bara **1-2**, fără încărcare exterioară între capete avem: *N=ct.*

$N_{1-2} = N_{2-1} = -V_1 = -68{,}75KN$ (se reprezintă **JOS**)

Pe bara **2-3**, cu forța uniform distribuită între capete, se ştie că: *N=ct.*

$N_{2-3} = N_{3-2} = -H_1 = -13{,}125KN$ (se reprezintă **JOS**)

Pe bara **3-4**, fără încărcare exterioară între capete avem: *N=ct.*

$N_{3-4} = N_{4-3} = -H_1 = -13{,}125KN$ (se reprezintă **JOS**)

Pe bara **4-5** se ştie că: *N=ct.*

$N_{4-5} = N_{5-4} = -V_5 = -101{,}25KN$

Pe consola **4-6**, fără forțe pe parcurs avem: *N=ct.*

$N_{4-6} = N_{6-4} = 0$

Diagrama T (Fig. 3.66)

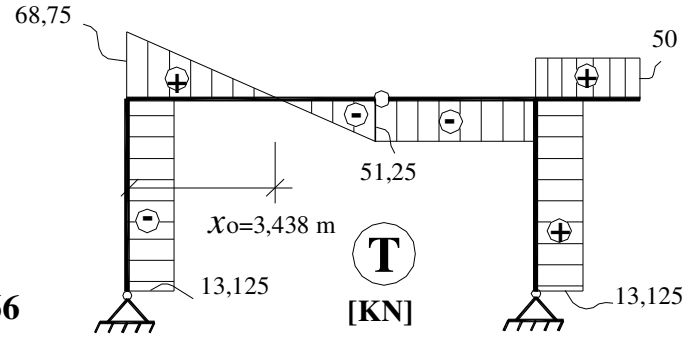


Fig. 3.66

Pe bara **1-2** forța tăietoare este constantă, deci avem:

$$T_{1-2} = T_{2-1} = -H_1 = -13{,}125KN$$ (se reprezintă **JOS**)

Pe bara **2-3** forța tăietoare variază liniar după cum urmează:

$$T_{2-3} = V_1 = 68{,}75KN$$

$$T_{3-2} = V_1 - 20 \cdot 6 = 68{,}75 - 120 = -51{,}25KN$$

$$T_{x_0} = 0 \Rightarrow 68{,}75 - 20 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 3{,}438m$$

Pe bara **3-4** forța tăietoare este constantă având valoarea:

$$T_{3-4} = T_{4-3} = T_{3-2} = -51{,}25KN$$ (se reprezintă **JOS**)

Pe bara **4-5** forța tăietoare este de asemenea constantă:

$$T_{4-5} = T_{5-4} = H_5 = 13{,}125KN$$ (s-au redus forțele de la **DR.** secțiunii)

Pe consola **4-6** forța tăietoare este constantă având valoarea:

$$T_{4-6} = T_{6-4} = V_6 = 50KN$$ (se reprezintă **SUS**)

Diagrama M (Fig. 3.67)

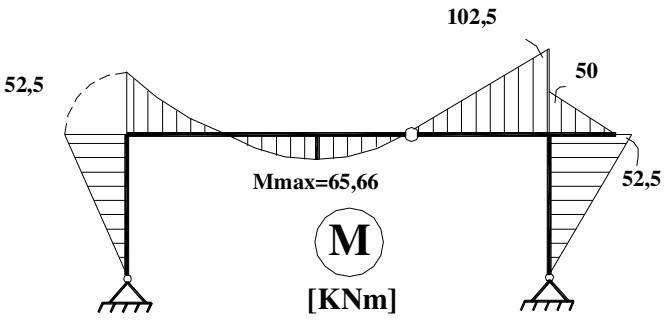


Fig. 3.67

Pe bara **1-2** momentul încovoietor variază liniar (*T= ct*):

$$M_{1-2} = 0;$$

$$M_{2-1} = -H_1 \cdot 4 = -13{,}125 \cdot 4 = -52{,}5KN \cdot m$$ (se reprezintă **SUS**)

Pe bara **2-3** momentul încovoietor variază parabolic, având o valoare pozitivă maximă în punctul de anulare al forței tăietoare:

$M_{2-3} = -52,5 KNm$ (prin rabatere pe nod rigid cu două bare)

$$M_{\max} = 68,75 \cdot 3,438 - 13,125 \cdot 4 - 20 \cdot 3,438 \cdot \frac{3,438}{2} = 65,66 KN \cdot m$$

Pe bara **3-4** momentul încovoietor este liniar:

$M_{3-4} = 0;$

$M_{4-3} = -(50 \cdot 1 + H_5 \cdot 4) = -102,5 KN \cdot m$

Pe bara **4-5** momentul încovoietor este liniar:

$M_{4-5} = -(H_5 \cdot 4) = -52,5$ (s-au redus forțele de la **DR.** secțiunii)

$M_{5-4} = 0$

Pe consola **4-6** momentul încovoietor este de asemenea liniar:

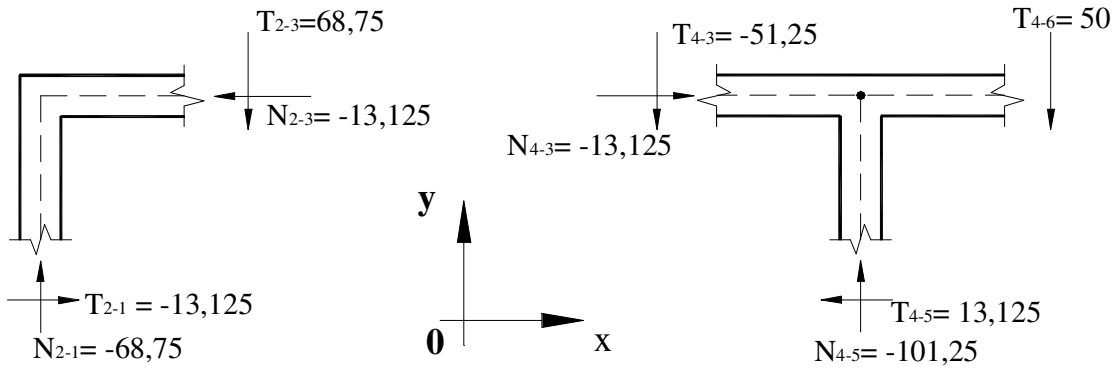
$M_{4-6} = -(50 \cdot 1) = -50 KN \cdot m$ (s-au redus fortele de la **DR.** secțiunii)

$M_{6-4} = 0$

c) Verificarea diagramelor

Verificarea diagramelor N + T (Fig. 3.68)

Fig. 3.68



Sistemul axelor de proiecție

$\sum_{nod} X_i = 13,125 - 13,125 = 0$

$\sum_{nod} Y_i = 68,75 - 68,75 = 0$

$\sum_{nod} X_i = 13,125 - 13,125 = 0$

$\sum_{nod} Y_i = 101,25 - 51,25 - 50 = 0$

Verificarea diagramei M (Fig. 3.69)

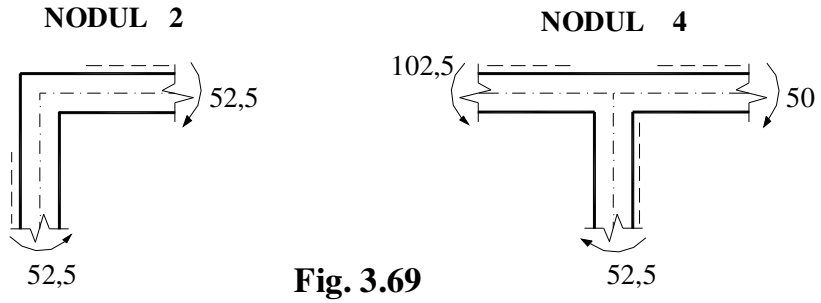


Fig. 3.69

$$\sum_{nod} M = -52{,}5 + 52{,}5 = 0 \qquad \sum_{nod} M = -102{,}5 + 52{,}5 + 50 = 0$$

Diagramele eforturilor secționale pe întreaga structură, obținute prin alăturarea diagramelor obținute pe părțile componente, sunt prezentate în **Fig. 3.70**.

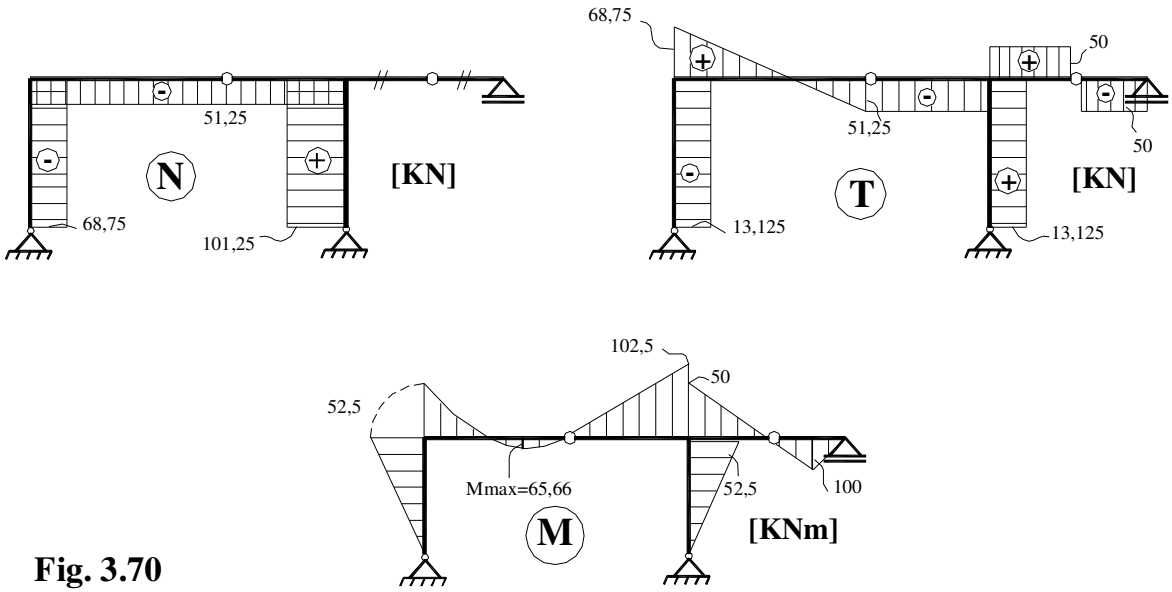


Fig. 3.70

CAPITOLUL 4
CALCULUL DEPLASĂRILOR PUNCTUALE PRODUSE DE FORŢELE EXTERIOARE ŞI DE CEDĂRILE DE REAZEME LA STRUCTURILE STATIC DETERMINATE

Deplasări elastice punctuale produse de forțe la structuri static determinate

La structurile static determinate deplasările punctuale produse de forțele exterioare se calculează cu ajutorul formulei Maxwell-Mohr:

$$\Delta_i = \int_{STR} m_i M \frac{dx}{EI} + \int_{STR} n_i N \frac{dx}{EA} + \int_{STR} kt_i T \frac{dx}{EA}$$ unde,

- **M**, **N**, **T** → reprezintă diagramele de eforturi din situația reală de încărcare.
- $\mathbf{m_i}$, $\mathbf{n_i}$, $\mathbf{t_i}$ → reprezintă diagramele unitare din situația virtuală de încărcare, în care o forță unitate acționează în direcția deplasării căutate **(Fig.4.1).**

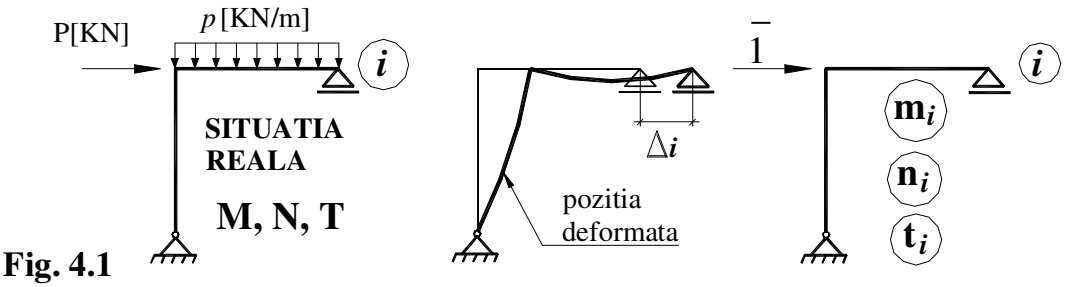


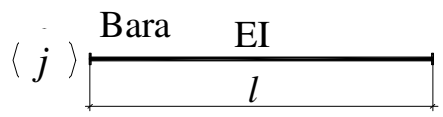
Fig. 4.1

Deoarece la grinzi drepte şi cadre efortul dominant este momentul încovoietor, se reține din formula Maxwell-Mohr numai termenul care conține acest efort, reducând astfel considerabil volumul de calcul. Se va lucra în continuare cu formula:

$$\Delta_i = \int_{STR} m_i \cdot M \cdot \frac{dx}{EI}$$

Efectuarea integralelor din formulă se va face folosind procedeul lungimilor transformate, procedeu care rezultă din regula de integrare Vereşciaghin.

Prin lungime transformată λ a unei bare se înțelege:



$$\lambda_{jk} = l_{jk}\frac{I_C}{I_{jk}}$$

unde,

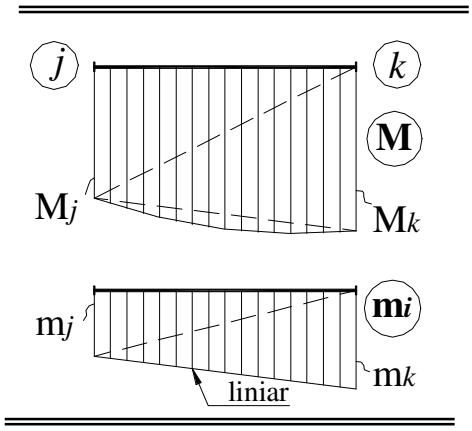
– $l_{jk} \rightarrow$ reprezintă lungimea barei

– $I_{jk} \rightarrow$ reprezintă momentul de inerție al barei

– $I_c \rightarrow$ reprezintă un moment de inerție convențional (ales), de obicei momentul de inerție minim din structura $\boldsymbol{I_c = I_{min}}$.

Integralele fiind de suprafață, au fost deduse reguli pentru principalele tipuri de suprafețe posibil de întâlnit în diagrama reală **M** şi diagrama unitară $\mathbf{m_i}$.

*OBSERVAȚIE: Pe porțiunea de bază **j-k** momentul unitar $\boldsymbol{m_i}$ trebuie să fie liniar (nu poligonal):* **(Fig. 4.2)**



$$\Delta_i = \int_j^k m_i \cdot M \frac{dx}{EI}$$

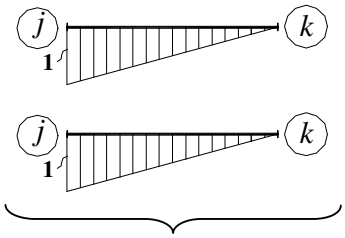
Fig. 4.2

Utilizând procedeul lungimilor transformate se calculează de fapt:

$6EI_C\Delta_i = 6EI_C\int_j^k m_i \cdot M\frac{dx}{EI}$, factorul $\boldsymbol{6EI_C}$ fiind cerut de regulile de integrare.

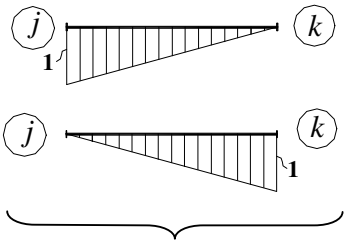
Aceste reguli de integrare sunt prezentate în continuare considerându-se momentele încovoietoare de acelaşi semn.

▪ două triunghiuri orientate la fel



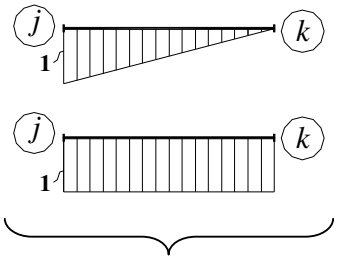
2·λ·1·1

▪ două triunghiuri orientate invers



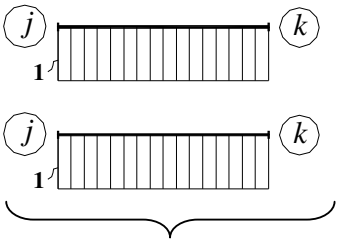
λ·1·1

▪ **triunghi cu dreptunghi**



3·λ·1·1

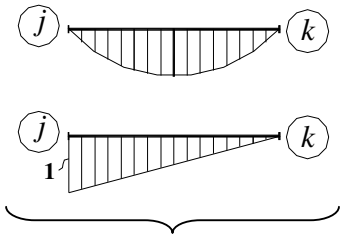
▪**dreptunghi cu dreptunghi**



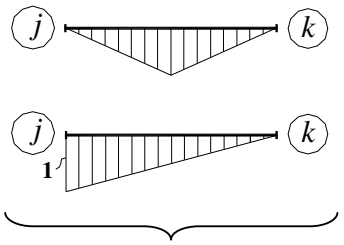
6·λ·1·1

Observaţie:

*Valorile **1** reprezintă momentele pe capătul barei **j-k.** Efectul forţelor de pe parcursul barei **j-k** se introduce în calcul cu ajutorul factorilor (caracteristicilor) de încarcare* $\boldsymbol{m_{jk}}$.

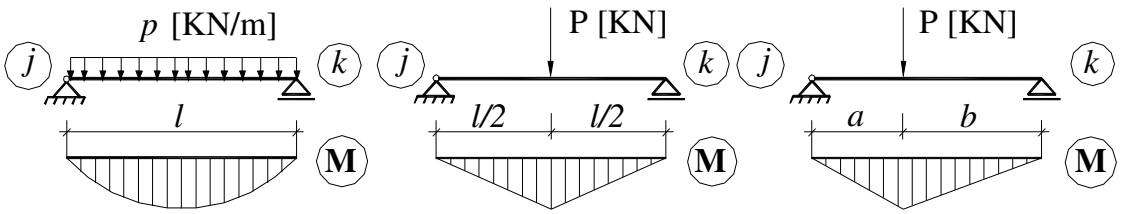


λ·m$_{jk}$·1



λ·m$_{jk}$·1

Se prezentăm în continuare câteva cazuri uzuale de încărcare şi factorii de încărcare corespunzători **(Fig. 4.3)**



$$m_{jk} = m_{kj} = \frac{pl^2}{4}$$

$$m_{jk} = m_{kj} = \frac{3Pl}{8}$$

$$m_{jk} = \frac{Pab}{l^2}(l+b)$$

$$m_{kj} = \frac{Pab}{l^2}(l+a)$$

Fig. 4.3

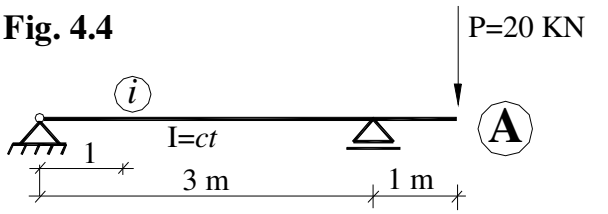
Aplicând procedeul lungimilor transformate, deplasarea $\boldsymbol{\Delta_i}$ devine:

$$6EI\Delta_i = 2\cdot\lambda\cdot M_j m_j + \lambda\cdot M_j m_k + \lambda\cdot M_K\cdot m_j + 2\cdot\lambda\cdot M_k\cdot m_k +$$
$$+\lambda\cdot m_{jk}\cdot m_j + \lambda\cdot m_{kj}\cdot m_k$$

APLICAȚIA 1.

Se cere calculul deplasărilor elastice punctuale indicate, produse de forțe la grinda din **Fig.4.4** şi determinarea poziției deformate a grinzii.

Fig. 4.4

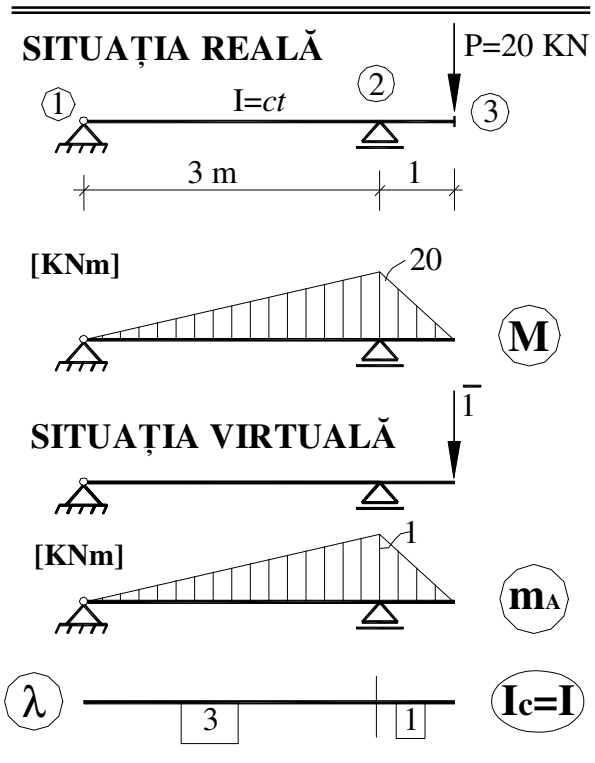


v_a, v_i=?
$EI=10^5\ KN\cdot m^2$

La calculul deplasărilor cerute se foloseşte formula Maxwell-Mohr:

$$\Delta_i = \int_{STR} m_i \cdot M \ \frac{dx}{EI}$$

Calculul deplasării v_a, deplasare verticală (Fig.4.5)



$$v_A = \int m_A M \frac{dx}{EI}$$

Calculul lungimilor transformate:

$\lambda_{1\text{-}2}=3$

$\lambda_{2\text{-}3}=3$

Aplicând procedeul lungimilor transformate se obține:

$$6EI_C v_A = 2\cdot 3\cdot 20\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 20\cdot 1 = 160$$

$$v_A = \frac{160}{6EI} = \frac{160}{6\cdot 10^5} = 0{,}00027m = 0{,}27m$$

Fig. 4.5

Din calcul a rezultat că deplasarea verticală $\mathbf{v_A}$ are loc în sensul forței unitate din situația virtuală de încărcare.

Calculul deplasării v_i, deplasare verticală:

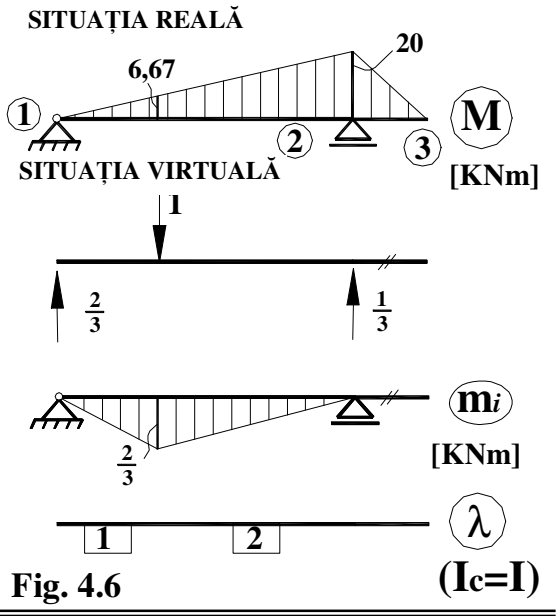


Fig. 4.6

$$v_i = \int m_i M \frac{dx}{EI}$$ unde,

- **M** provine din situația reală de încărcare, cunoscută deja.

- **m_i** provine din situația virtuală de încărcare, necunoscută. Pentru obținerea diagramei **m_i** se construieşte situația virtuală şi se rezolvă **(Fig. 4.6)**

Se calculează lungimile transformate pe porțiunile **1-i** si **i-2** deoarece diagrama **m_i** este poligonală.

Deplasarea **Δ_i** se calculează după cum urmează:

$$6EI_C v_i = -2\cdot 1\cdot 6{,}67\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot 2\cdot 6{,}67\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot 20\cdot\frac{2}{3} = -53{,}35$$

$$v_i = -\frac{53{,}35}{6EI} = -0{,}000089m = -0{,}089mm$$

Se observă că deplasarea verticală a secțiunii **i** are loc în sensul invers al forței unitate din situația virtuală de încărcare.

Cunoscând cele două deplasări verticale **v_A** şi **v_i** şi fibrele întinse indicate de diagrama **M** se poate desena poziția deformată a grinzii **(Fig. 4.7)**

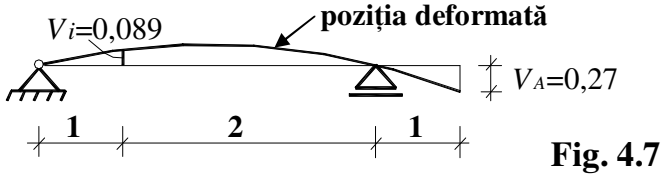
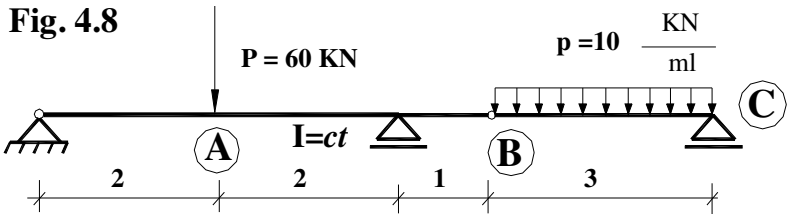


Fig. 4.7

APLICAȚIA 2.

Pentru grinda cu consolă şi articulații din **fig. 4.8** se cere calculul deplasărilor indicate şi determinarea poziției deformate.

Fig. 4.8



Calculul deplasării verticale v_A (Fig.4.9)

Aplicând formula Maxwell-Mohr avem:

$$v_A = \int m_A M \frac{dx}{EI}$$

a) Calculul reacțiunilor

P.P.

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_1 = 0}$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 4 - 60 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 0$$

$$\boldsymbol{V_1 = 26{,}25\ KN}$$

$$(\sum M)_1 = -V_3 \cdot 4 - 15 \cdot 5 + 60 \cdot 2 = 0$$

$$\boldsymbol{V_3 = 48{,}75\ KN}$$

Verificare:

$$\sum Y_i = 26{,}25 + 48{,}75 - 60 - 15 = 0$$

b) Calculul diagramei M

$$M_2 = 26{,}25 \cdot 2 = 52{,}5 KNm$$

$$M_3 = -(15 \cdot 1) = -15 KNm$$

Se ştie că:

$\lambda_{1-A} = \lambda_{A-3} = 2 \rightarrow$ obținem deplasarea căutată

$$6EI_C v_A = 2 \cdot 2 \cdot 52{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 52{,}5 \cdot 1 -$$
$$- 2 \cdot 30 \cdot 1 = 360$$

$$v_A = \frac{360}{6 \cdot 80 \cdot 500} = 0{,}00075 m = 0{,}75 mm$$

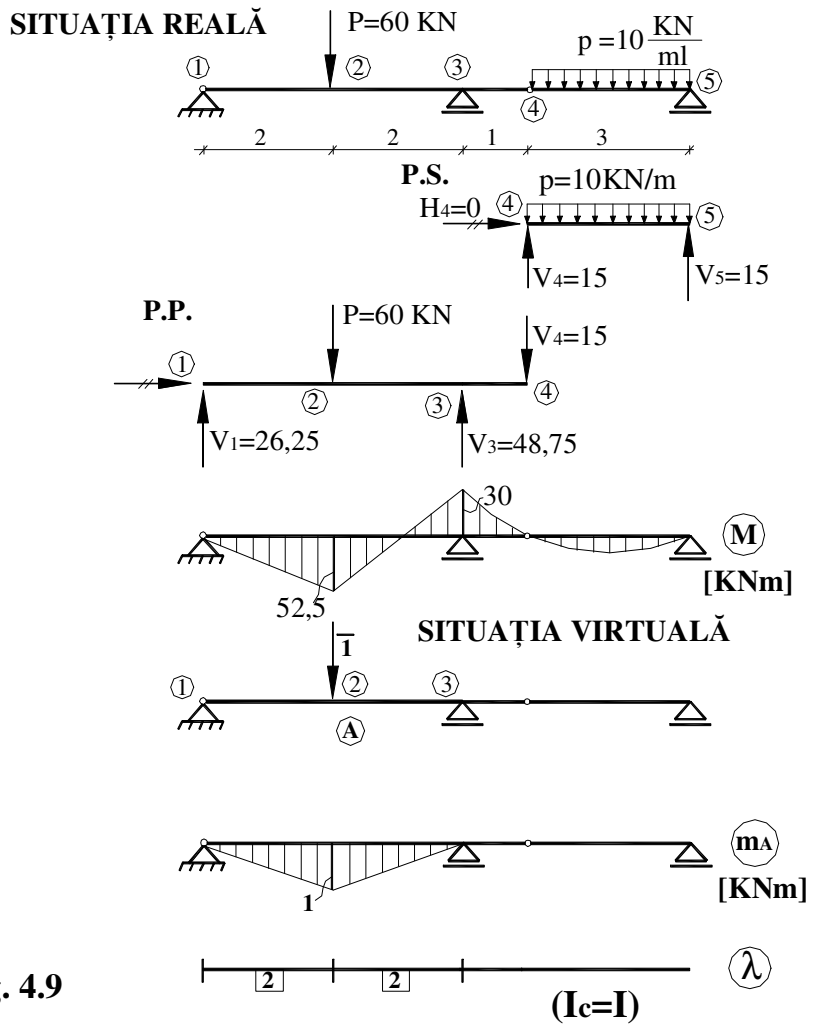


Fig. 4.9

Calculul deplasării verticale v_B (Fig. 4.10)

Din formula Maxwell-Mohr rezultă:

$$v_B = \int m_B M \frac{dx}{EI}$$

Se observă că diagrama **M** este cunoscută din rezolvarea anterioară. Diagrama $\mathbf{m_B}$ se obține din situația virtuală de încărcare.

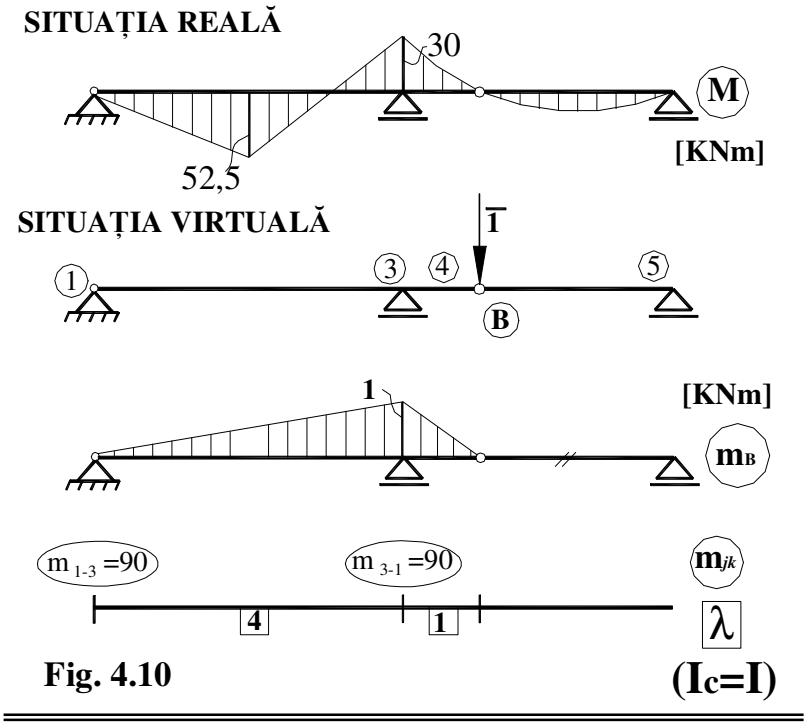


Fig. 4.10 **(I_C=I)**

Calculul lungimilor transformate şi a caracteristicilor de încărcare:

$$\lambda_{1-3} = 4 \cdot \frac{I}{I} = 4 \qquad ; \qquad \lambda_{3-4} = 1 \cdot \frac{I}{I} = 1$$

$$m_{1-3} = m_{3-1} = \frac{3Pl}{8} = \frac{3 \cdot 60 \cdot 4}{8} = 90$$

Calculul deplasării v_B, utilizând procedeul lungimilor transformate:

$$6EI_C v_B = 2 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 1 - 4 \cdot 90 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 30 \cdot 1 = -60$$

$$v_B = -\frac{60}{6 \cdot 80000} = -0.000125m = -0.125mm$$

Se observă că deplasarea verticală $\mathbf{v_B}$ are loc în sensul invers forței unitate din situația virtuală de încărcare.

Calculul rotirii θ_C (Fig. 4.11)

Din formula lui Maxwell-Mohr se ştie că:

$$\boxed{\theta_C = \int m_C M \frac{dx}{EI}}$$

Situația reală de încărcare fiind cunoscută trebuie să se construiască situația virtuală pentru a obține diagrama $\mathbf{m_C}$.

Calculul reacțiunilor

P.P. $\sum X_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_1}$**=0**

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$\boldsymbol{V_1} = \frac{1}{12} \boldsymbol{KN}$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_3 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 5 = 0$$

$$\boldsymbol{V_3} = \frac{5}{12} \boldsymbol{KN}$$

Calculul caracteristicilor de încărcare:

$$m_{4-5} = m_{5-4} = \frac{pl^2}{4} = \frac{10 \cdot 3^2}{4} = 22{,}5$$

Calculul rotirii θ_C

$$6EI_C\theta_C = -2 \cdot 4 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 90 \cdot \frac{1}{3} -$$

$$-2 \cdot 1 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot 22{,}5 \cdot 1 = -47{,}5$$

$$\theta_C = -\frac{47{,}5}{6 \cdot EI} = -0.99 \cdot 10^{-4} \, radiani$$

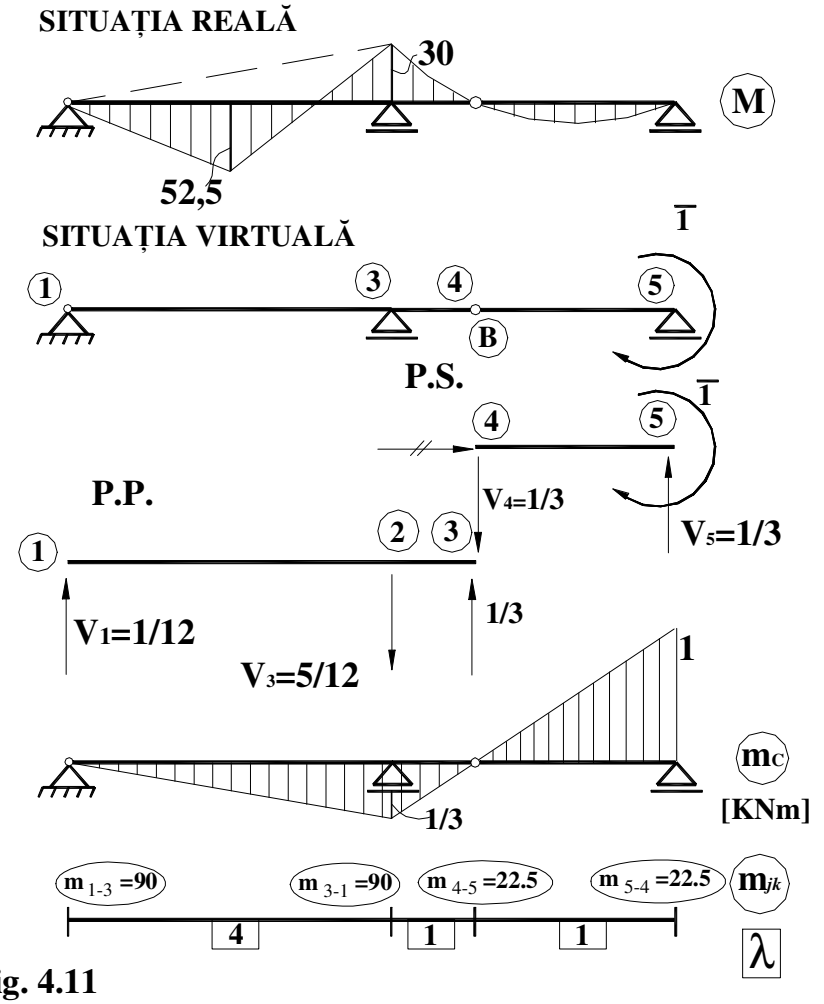


Fig. 4.11

Se observă că rotirea $\boldsymbol{\theta_C}$ are loc în sensul antiorar.

Cunoscând deplasările $\boldsymbol{v_A}$, $\boldsymbol{v_B}$ si $\boldsymbol{\theta_C}$ şi fibrele întinse indicate de diagrama **M** putem trasa poziția deformată a grinzii date **(Fig. 4.12)**

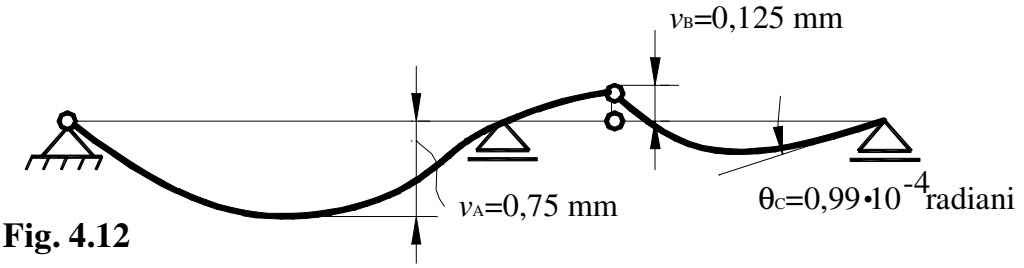


Fig. 4.12

APLICAȚIA 3

Pentru cadrul din **fig. 4.13** se cere calculul deplasărilor elastice punctuale indicate şi determinarea poziției deformate.

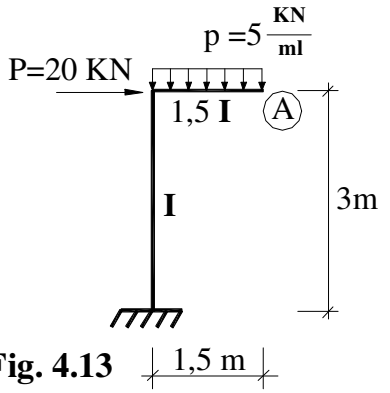


Fig. 4.13

u_A, v_A =?
EI=120000KNm^2

Calculul deplasării orizontale u_A (Fig.4.14)

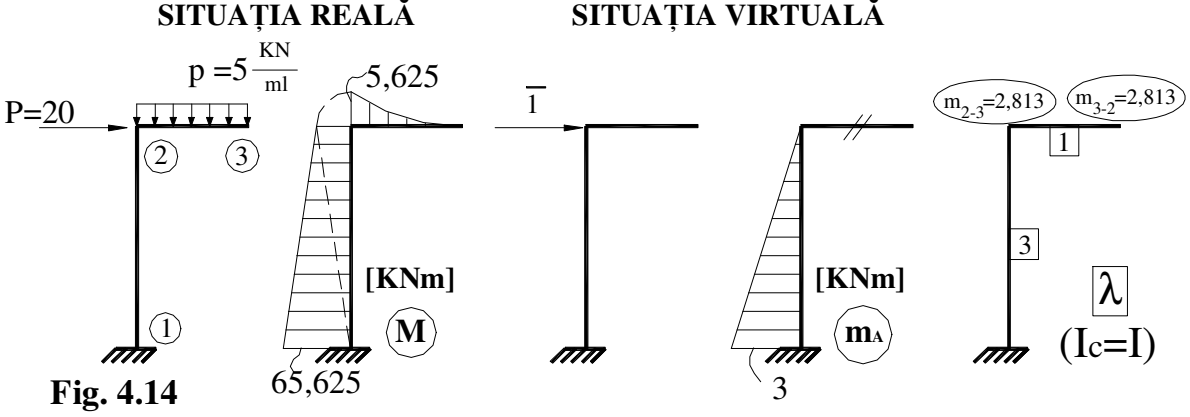


Fig. 4.14

$$\lambda_{1-2} = 3 \cdot \frac{I}{I} = 3 \quad ; \quad \lambda_{2-3} = 1{,}5 \cdot \frac{I}{1{,}5I} = 1 \quad ; \; m_{2-3} = m_{3-2} \frac{Pl^2}{4} = \frac{5 \cdot 1{,}5^2}{4} = 2{,}813$$

Se obține deplasarea orizontală $\mathbf{u_A}$ aplicând formula Maxwell-Mohr:

$$u_A = \int m_A M \frac{dx}{EI} \text{ de unde rezultă:}$$

$$6EI_C u_A = 2 \cdot 3 \cdot 65{,}625 \cdot 3 + 3 \cdot 5{,}625 \cdot 3 = 1231{,}875$$

$$u_A = \frac{1231{,}875}{6EI} = \frac{1231{,}875}{6 \cdot 120000} = 0{,}00171m = 1{,}71mm$$

Calculul deplasării verticale $\mathbf{v_A}$ (Fig. 4.15)

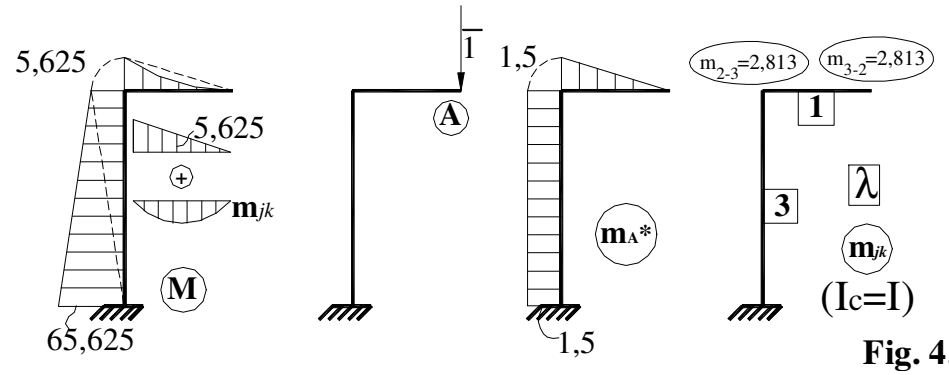


Fig. 4.15

Știind că:

$$v_A = \int m_A^* M \frac{dx}{EI}, \text{ se obține:}$$

$$6EI_C v_A = 3 \cdot 3 \cdot 65{,}625 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 3 \cdot 5{,}625 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1 \cdot 5{,}625 \cdot 1{,}5 - 1 \cdot 2{,}831 \cdot 1{,}5 = 974{,}53$$

$$v_A = \frac{974{,}53}{6EI} = \frac{974{,}53}{6 \cdot 120000} = 0{,}00135m = 1{,}35mm$$

Se observă că ambele deplasări au loc în sensul forțelor unitate din situațiile virtuale de încărcare.

Cunoscând deplasările $\mathbf{u_A}$ și $\mathbf{v_A}$ și fibrele întinse indicate de digrama **M** se poate desena poziția deformată a cadrului **(Fig.4.16)**, respectând legăturile structurii și continuitatea materialului.

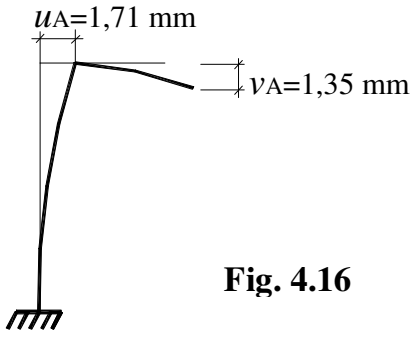
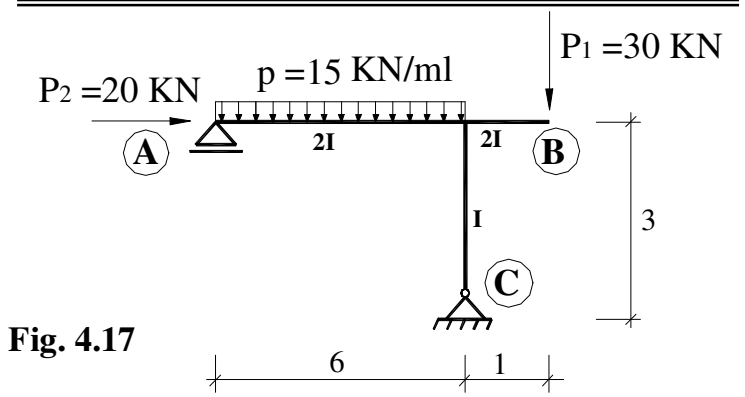


Fig. 4.16

APLICAȚIA 4

Pentru cadrul simplu rezemat din **fig. 4.17** se cere calculalul deplasărilor indicate şi determinarea poziției deformate.



u_A, v_B, θ_C =?
EI=80000KNm^2

Fig. 4.17

Calculul deplasării orizontale u_A (Fig.4.18)

Conform formulei Maxwell-Mohr deplasarea virtuală se obține integrând diagramele $\mathbf{m_A}$ şi **M** din situația virtuală de încărcare, respectiv situația reală de încărcare.

$$u_A = \int m_A M \frac{dx}{EI}$$

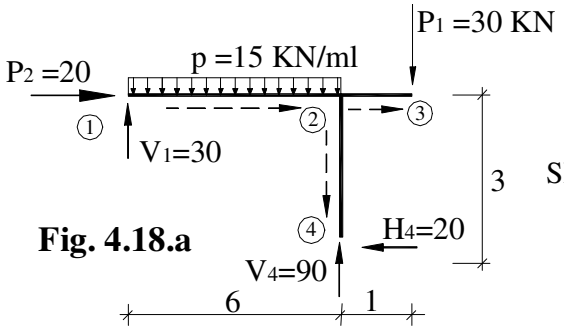


Fig. 4.18.a

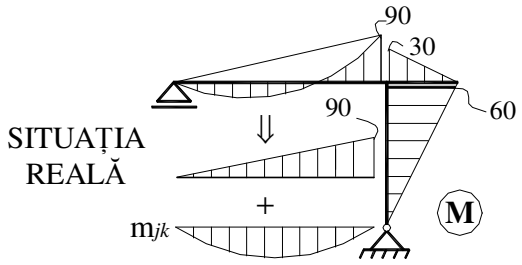


Fig. 4.18.b

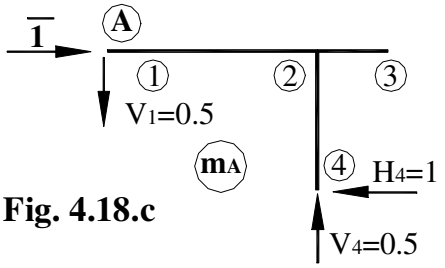


Fig. 4.18.c

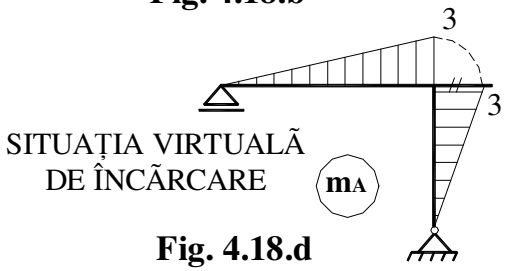


Fig. 4.18.d

Calculul reacțiunilor (Fig. 4.18.a)

$\sum X_i = 0 \Rightarrow P_2 - H_4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_4=P_2=20KN}$

$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 6 + 20 \cdot 3 - 15 \cdot 6 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0$

$\boldsymbol{V_1=30\ KN}$

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_4 \cdot 6 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 7 + 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0$

$\boldsymbol{V_4=90\ KN}$

Verificare: $\sum Y_i = 30 + 90 - 15 \cdot 6 - 30 = 0$

Calculul diagramei M (Fig.4.18.b)

$M_{2-1} = 30 \cdot 6 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = -90 KNm$

$M_{2-4} = -(20 \cdot 3) = -60 KNm$

(au fost reduse forțele de la **DR.** secțiunii)

$M_{2-3} = -(30 \cdot 1) = -30 KNm$

(au fost reduse forțele de la **DR.** secțiunii)

Calculul reacțiunilor (Fig.4.18.c)

$\sum X_i = 0 \Rightarrow 1 - H_4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_4=1\ KN}$

$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow -V_1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_1=0,5KN}$

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_4 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_4=0,5KN}$

Calculul diagramei m_A (Fig.4.18.d)

$M_{2-1} = -0,5 \cdot 6 = -3 KNm$

$M_{2-3} = 0$

$M_{2-4} = -(1 \cdot 3) = -3 KNm$

(au fost reduse forțele de la **DR.** secțiunii)

Calculul lungimilor transformate şi al caracteristicilor de încărcare (Fig.4.19)

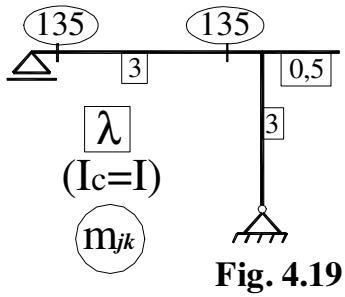


Fig. 4.19

$\lambda_{1-2} = 6 \cdot \frac{I}{2I} = 3$

$\lambda_{2-3} = 1 \cdot \frac{I}{2I} = 0,5$

$\lambda_{2-4} = 3 \cdot \frac{I}{I} = 3$

$m_{1-2} = m_{2-1} = \frac{pl^2}{4} = \frac{15 \cdot 6^2}{4} = 135$

Aplicând procedeul lungimilor transformate obținem deplasarea orizontală căutată:

$$6EI_C u_A = 2 \cdot 3 \cdot 90 \cdot 3 - 3 \cdot 135 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 3 = 1485$$

$$u_A = \frac{1485}{6EI} = \frac{1485}{6 \cdot 80000} = 0,00309m = 3,09mm$$

Se observă că deplasarea orizontală $\boldsymbol{u_A}$ are loc în sensul forței unitate din situația virtuală de încărcare.

Calculul deplasării verticale v_B (Fig.4.20)

Aplicând formula Maxwell-Mohr, se obține:

$$v_B = \int_{STR} m_B M \frac{dx}{EI}$$

Se bservă că situaţia reală ca şi lungimile transformate şi caracteristicile de încărcare rămân neschimbate.

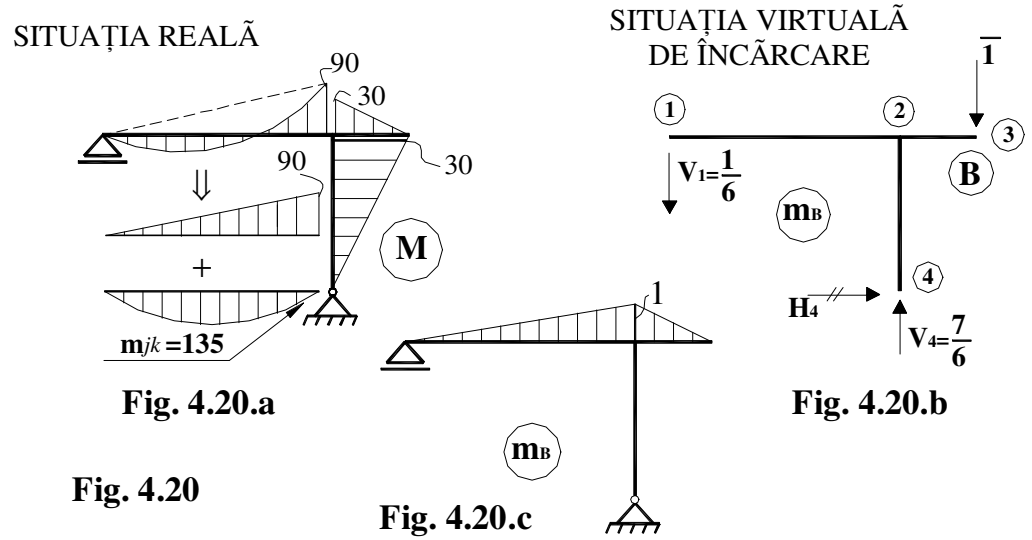


Fig. 4.20.a

Fig. 4.20.b

Fig. 4.20

Fig. 4.20.c

Calculul reacţiunilor (Fig.4.20.b)

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_4=0}$$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow -V_1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_1=\frac{1}{6}KN}$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_4 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_4=\frac{7}{6}KN}$$

Calculul diagramei m_B (Fig.4.20.c)

$$m_{2-1} = -\frac{1}{6} \cdot 6 = -1KN$$

$$m_{2-3} = -(1 \cdot 1) = -1KN$$

$$m_{2-4} = 0$$

Calculul deplasării verticale v_B:

$$6EI_C v_B = 2 \cdot 3 \cdot 90 \cdot 1 - 3 \cdot 135 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 60 \cdot 1 = 195$$

$$v_B = \frac{195}{6EI} = \frac{195}{6 \cdot 80000} = 0{,}000406m = 0{,}406mm$$

Se observă că deplasarea verticală $\mathbf{v_B}$ are loc în sensul forţei unitate din situaţia virtuală de încărcare.

Calculul rotirii θ_C (Fig. 4.21)

Conform formulei Maxwell-Mohr, rotirea $\boldsymbol{\theta_C}$ este:

$$\theta_C = \int_{STR} m_C M \frac{dx}{EI}$$

Diagrama reală M, lungimile transformate şi respectiv caracteristicile de încărcare (Fig. 4.19), fiind cunoscute din rezolvările anterioare se va construi numai situaţia virtuală de încărcare (Fig. 4.21).

SITUAŢIA REALĂ

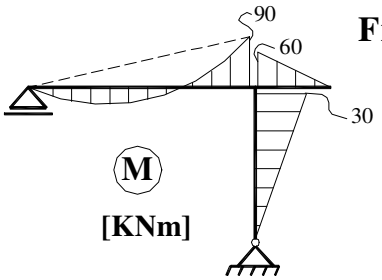


Fig. 4.21.a

SITUAŢIA VIRTUALĂ

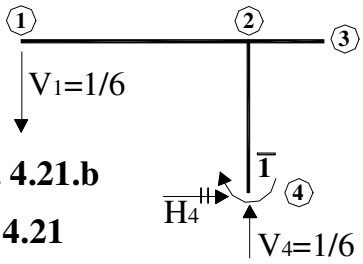


Fig. 4.21.b

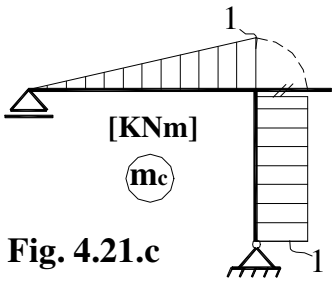


Fig. 4.21.c

Fig. 4.21

Aplicând procedeul lungimilor transformate se obţine:

$$6EI_C \cdot \theta_C = 2 \cdot 3 \cdot 90 \cdot 1 - 3 \cdot 135 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 30 \cdot 1 = 405$$

$$\theta_C = 0{,}000843 \text{ } radiani$$

Se observă că rotirea secţiunii C are loc în sens orar.

Cunoscând deplasările calculate anterior ($\mathbf{u_A}$, $\mathbf{v_B}$, $\boldsymbol{\theta_C}$) şi fibrele întinse indicate de diagrama **M** se poate desena poziţia deformată a cadrului, respectând legăturile structurii şi continuitatea materialului **(Fig.4.22).**

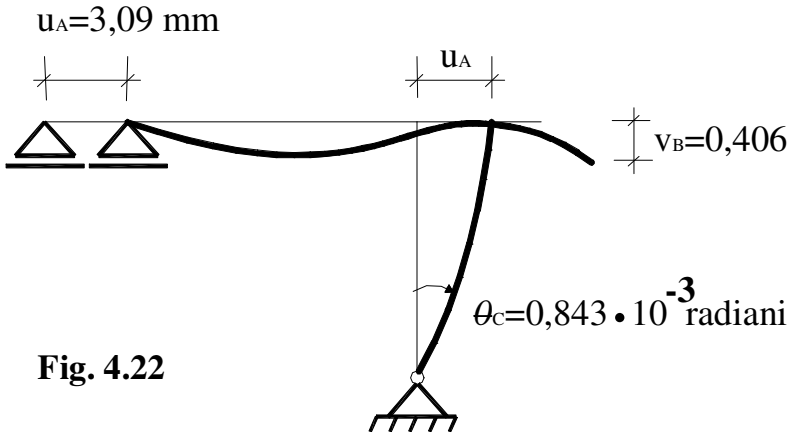


Fig. 4.22

APLICAȚIA 5

Pentru cadrul din **fig. 4.23** se cere calculul deplasărilor indicate şi determinarea poziției deformate.

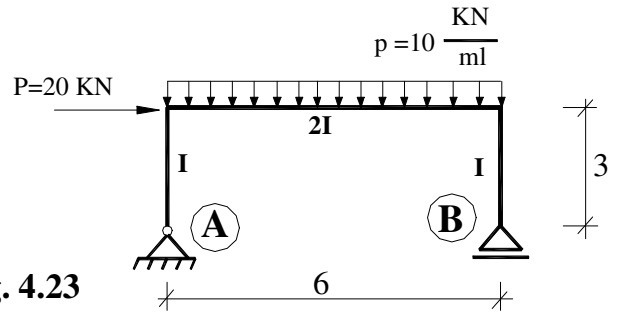


Fig. 4.23

θ_A, u_B=?
EI=100000KNm^2

Calculul rotirii θ_A (Fig.4.24)

Se utilizează formula Maxwell-Mohr:

$$\theta_A = \int_{STR} m_A M \frac{dx}{EI}$$

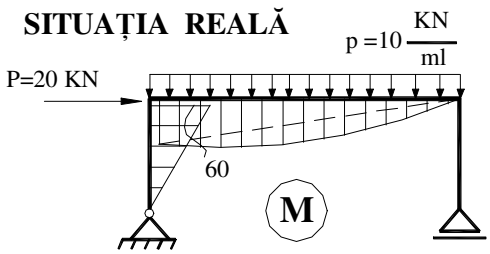


Fig. 4.24.a

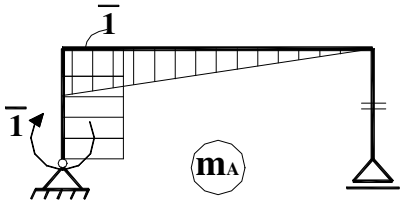


Fig. 4.24.b

Fig. 4.24

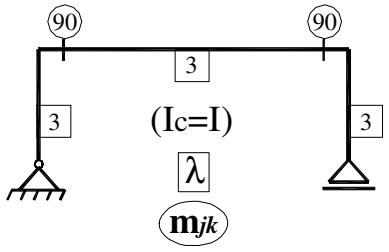


Fig. 4.24.c

$$m_{2-3} = m_{3-4} = \frac{pl^2}{4} = \frac{10 \cdot 6^2}{6} = 90$$

Aplicând procedeul lungimilor transformate se obține:

$$6EI_C\theta_A = 3\cdot 3\cdot 60\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 60\cdot 1 + 3\cdot 90\cdot 1 = 1170$$

$$\theta_A = \frac{1170}{6EI} = 0{,}0117\, radiani$$

Se observă că rotirea secțiunii **A** are loc în sensul momentului unitate, adică orar.

Calculul deplasării orizontale u_B (Fig 4.25)

Deplasarea orizontală $\boldsymbol{u_B}$ se calculează folosind formula Maxwell-Mohr:

$$u_B = \int_{STR} m_B M \frac{dx}{EI} \ ,$$

unde **M** este diagrama de moment reală cunoscută din calculul rotirii $\boldsymbol{\theta_A}$, iar $\mathbf{m_B}$ este diagrama din situația virtuală de încărcare care trebuie rezolvată.

SITUAȚIA REALĂ **SITUAȚIA VIRTUALÃ DE ÎNCĂRCARE**

Fig. 4.25.a

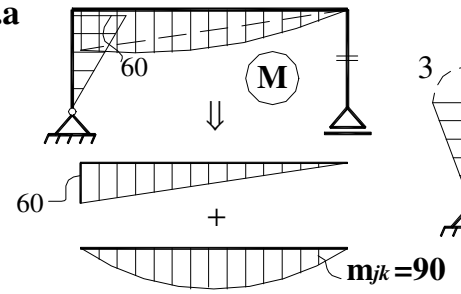


Fig. 4.25.b

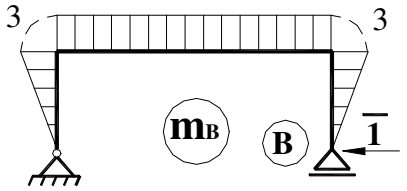


Fig. 4.25

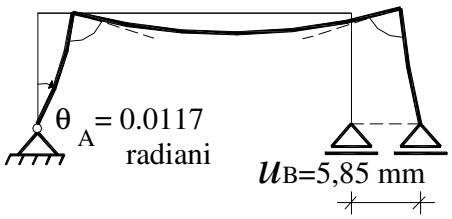
Deplasarea orizontală $\mathbf{u_B}$ rezultă:

$$6EI_C u_B = -2\cdot 3\cdot 60\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 60\cdot 3 - 3\cdot 90\cdot 3 = -3510$$

$$u_B = -\frac{3510}{6EI} = -0{,}00585m = -5{,}85mm$$

Se observă că deplasarea orizontală $\boldsymbol{u_B}$ are loc în sens invers forței unitate din situația virtuală de încărcare. Cunoscând deplasările $\boldsymbol{\theta_A}$ şi $\boldsymbol{u_B}$ şi fibrele întinse indicate de diagrama **M** se poate desena poziția deformată a cadrului, respectând legăturile structurii şi continuitatea materialului **(Fig.4.26)**

Fig. 4.26



Deplasări punctuale produse de cedările de reazeme la structurile static determinate

Cedările de reazeme sunt consecința celorlalte încărcări de pe structură.

Structurile static determinate au număr minim de legături necesare asigurării invariabilității geometrice.

În timpul cedării unui reazem acesta nu funcționează, structura devenind mecanism. Mecanismele se deplasează fără deformarea barelor, deci fără apariția eforturilor secționale. În concluzie la structurile static determinate cedările de reazeme nu produc eforturi **(Fig.4.27).**

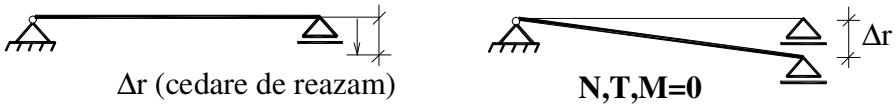


Fig. 4.27

Deplasările produse de cedările de reazeme se calculează cu ajutorul relației:

$$\Delta_{j,C} = -\sum \overline{r}_i \cdot \Delta_r \qquad \text{unde,}$$

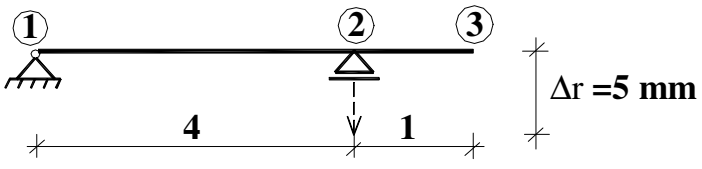
$\mathbf{\Delta_r}$ $\rightarrow$ reprezintă cedările reale.

$\overline{r_i}$ $\rightarrow$ reprezintă reacțiunile din situația virtuală de încărcare, cunoscută din formula Maxwell-Mohr.

APLICAȚIA 6

Pentru grinda din figura **4.28** se cere calculul deplasării punctuale indicate produsă de cedarea de reazem şi reprezentarea poziției deplasată:

Fig. 4.28



V3=?

Deplasarea verticală v_3 se calculează folosind relația:

$$v_{3,C} = -\sum \bar{r}_3 \cdot \Delta_r \ ;$$

Reacțiunile v_3 se obțin din situația virtuală de încărcare (**Fig.4.29**).

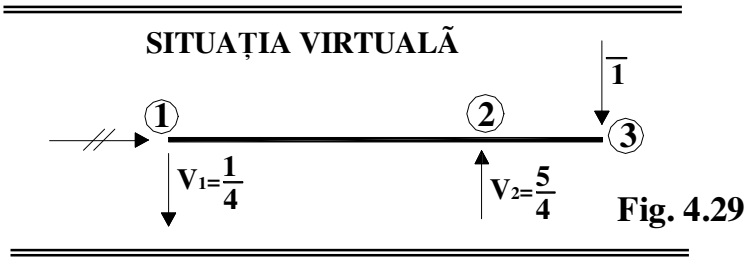


Fig. 4.29

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_1=0}$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_1 \cdot 4 + 1 = 0 \quad \boldsymbol{V_1}=\frac{1}{4}$$

$$KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 0$$

$$\boldsymbol{V_2}=\frac{5}{4}\ KN$$

Reacțiunile din situația virtuală sunt $\boldsymbol{H_1}$,$\boldsymbol{V_1}$ si $\boldsymbol{V_2}$.

$$v_{3,C} = -\sum r_3 \Delta_r = -(-V_2 \cdot \Delta_r) = +\frac{5}{4} \cdot 5 = 6{,}25mm$$

Observație: produsul $\bar{r}_i \cdot \Delta_r$ este pozitiv dacă reacțiunea şi cedarea de reazem au acelaşi semn.

Se observă că deplasarea $v_{3,C}$ a rezultat pozitivă, ceea ce indică că deplasarea are loc în sensul forței unitate din situția virtuală de încărcare.

Poziția deplasată a grinzii este reprezentată în figura **4.30** .

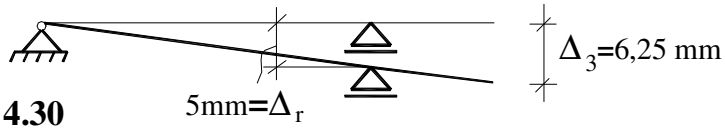


Fig. 4.30

APLICAȚIA 7

Pentru cadrul din **fig. 4.31** se cere calculul deplasărilor punctuale indicate produse de cedările de reazeme şi reprezentarea poziției deplasate:

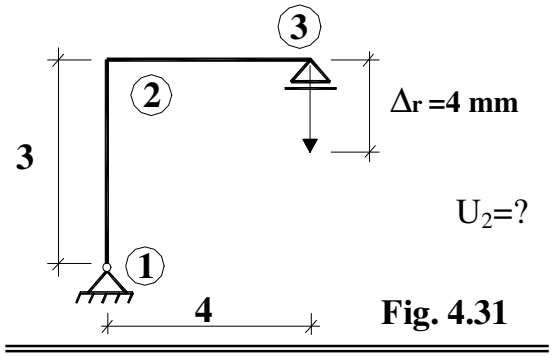


Fig. 4.31

Deplasarea orizontală $\mathbf{u_2}$ se calculează folosind relația: $u_{2,C} = -\sum \overline{r_2} \cdot \Delta_r$, unde $\boldsymbol{r_2}$ reprezintă reacțiunile din situația virtuală de încărcare **(Fig.4.32).**

SITUAȚIA VIRTUALÃ DE ÎNCĂRCARE

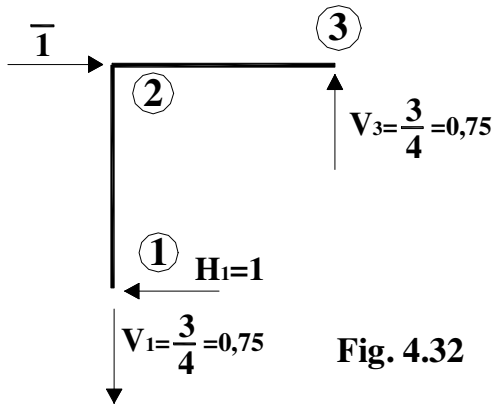


Fig. 4.32

Reactiunile $\boldsymbol{r_2}$ sunt:H_1, V_1 si V_3.
Aplicând formula de calcul obtinem:
$u_{2,C} = -\sum \overline{r_2}\Delta_r = -(-V_3 \cdot \Delta_r) = +0{,}75 \cdot 4 = 3mm$

Poziția deplasată a cadrului este prezentată în **fig.4.33**

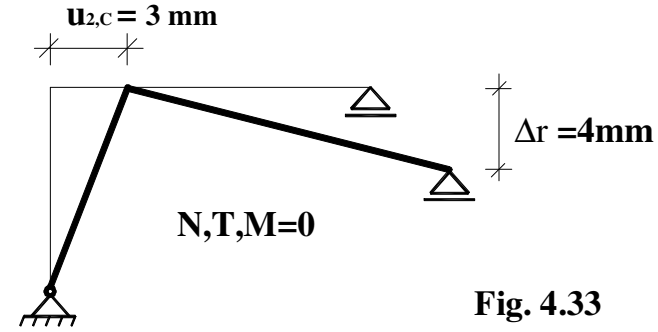


Fig. 4.33

PARTEA a II –a
STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

CAPITOLUL 6
METODA FORȚELOR

Metoda forțelor **(M.F.)** este o metodă de rezolvare a structurilor static nedeterminate.

Structurile static nedeterminate au legături suplimentare față de numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice, deci şi forțe de legătură suplimentare. Pentru determinarea acestora nu sunt suficiente ecuațiile de echilibru static, chiar dacă forțele se raportează la poziția nedeformată a structurii. Se Consideră structura din **fig. 6.1** încărcată cu forțe.

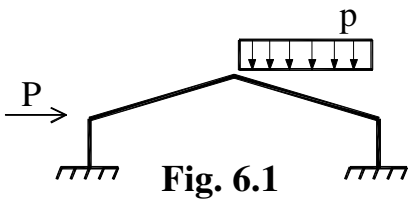
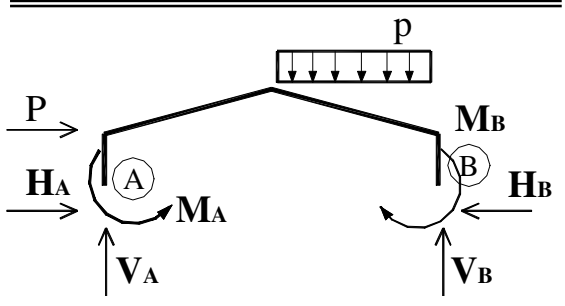


Fig. 6.1

Aplicând relația care permite stabilirea gradului de nedeterminare statică se constată că structura este de trei ori static nedeterminată.

$$n = N = l + r - 3c = 0 + 6 - 3 \cdot 1 = 3.$$

Aceasta înseamnă că există trei legături suplimentare în structură, rezolvarea acesteia nefiind posibilă numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static. Se demonstrează cele afirmate anterior punând in evidență forțele de legătură din reazeme în număr de şase, în timp ce pentru un corp în plan se pot scrie numai trei ecuații de echilibru independente (fig. 6.2.).



Numărul forțelor de legătură necunoscute este:

$$N_{nec} = 6$$

Numărul ecuațiilor de echilibru independente posibil de scris:

$$N_{ec} = 3$$

Rezultă $n = N = N_{nec} - N_{ec} = 6 - 3 = 3$ (q.e.d.)

Prin urmare pentru determinarea forţelor de legătură din legăturile suplimentare trebuie să apelăm şi la condiţia de compatibilitate a deformatei structurii cu legăturile sale. Metoda de rezolvare se numeşte metoda forţelor **(M.F.)** şi se bazează pe cunoaşterea rezolvării structurilor static determinate.

Astfel prin eliminarea legăturilor suplimentare din structura reală (în număr de trei, vezi **fig. 6.1**) se obţine o structură static determinată, încărcată cu forţele exterioare date şi cu forţele de legătură corespunzătoare legăturilor eliminate, necunoscute (**fig. 6.3**). Această structură se numeşte sistem de bază **(S.B.)** şi va fi folosit pentru rezolvarea integrală a structurii iniţiale. Pentru structura dată se pot obţine, teoretic, o infinitate de sisteme de bază prin eliminarea a trei legături interioare sau/şi exterioare (**fig. 6.3**).

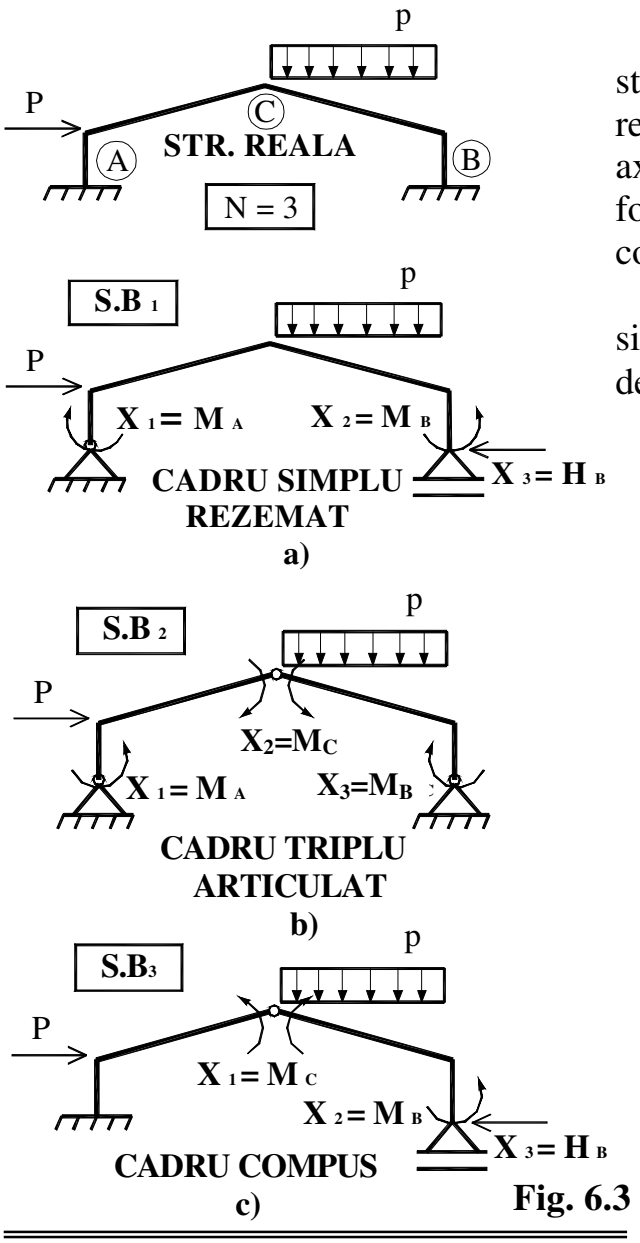


Fig. 6.3

Sistemele de bază propuse sunt toate static determinate, invariabile geometric şi respectă condiţia de echilibru static (conform axiomei legăturilor, legăturile suprimate au fost înlocuite cu forţele de legătură corespunzătoare, necunoscutele problemei).

Se constată însă că deformatele sistemelor de bază diferă de poziţia deformată a structurii reale.

Astfel la $\mathbf{S.B_1}$, în secţiunea **A** rotirea este liberă, iar în secţiunea **B** rotirea şi deplasarea orizontală sunt posibile. In structura reală însă aceste deplasări sunt nule (avem încastrare în **A** şi **B**). Rezultă că trebuie să se impună sistemului de bază condiţia ca deformata lui să respecte legăturile structurii reale, adică să fie compatibilă cu structura reală. Se obţin în acest mod trei ecuaţii de condiţie, care vor permite determinarea valorilor forţelor de legătură necunoscute şi rezolvarea problemei.

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &\neq 0 \\ \theta_B &\neq 0 \\ u_B &\neq 0 \end{aligned}\right\} \text{ la } \boxed{\mathbf{S.B_1}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_A = 0\\ \theta_B = 0\\ u_B = 0\end{array}\right\}$$ dar, la STR. REALĂ

Sistemul ecuațiilor de condiție, obținut prin aplicarea simultană a principiului superpoziției şi a principiului proporționalității sistemului de bază **S.B$_1$** încărcat cu forțele exterioare şi cu forțele static nedeterminate necunoscute va fi:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \theta_A = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0\\ \Delta_2 = \theta_B = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0\\ \Delta_3 = u_B = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0\end{cases}$$

Rezolvând sistemul ecuațiilor de condiție obținem forțele de legătură necunoscute X_1,X_2 şi X_3 :

$$X_1 = M_A \; ; \; X_2 = M_B \; ; \; X_3 = H_B$$

În continuare, pe **S.B$_1$** fiind cunoscute toate forțele exterioare se pot calcula reacțiunile şi trasa diagramele de eforturi secționale N, T şi M.

În cazul sistemului de bază **S.B$_2$** (**fig. 6.3.b**) se observă că deplasările corespunzătoare legăturilor suprimate din structura reală sunt posibile:

$$\theta_A \neq 0; \qquad \theta_B \neq 0; \qquad \theta_C^{rel} \neq 0 .$$

Impunând condiția ca deformata sistemului de bază **S.B$_2$** să fie compatibilă cu legăturile structurii reale se obține sistemul ecuațiilor de condiție, care va permite determinarea forțelor de legătură static nedeterminate necunoscute:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \theta_A = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0\\ \Delta_2 = \theta_C^{rel} = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0\\ \Delta_3 = \theta_B = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = M_A\\ X_2 = M_C\\ X_3 = M_B\end{cases}$$

Pentru sistemul de bază **S.B$_3$** (**fig. 6.3.c**) sistemul ecuațiilor de condiție va avea forma:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \theta_A = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0\\ \Delta_2 = \theta_B = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0\\ \Delta_3 = u_B = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = M_C\\ X_2 = M_B\\ X_3 = H_B\end{cases}$$

În concluzie se constată că în metoda forțelor ecuațiile de condiție exprimă compatibilitatea deformatei sistemului de bază folosit pentru rezolvare cu legăturile structurii reale. Se subliniază de asemenea faptul că sistemele de bază folosite trebuie să fie static determinate, invariabile geometric şi uşor de rezolvat.

GRINZI CONTINUE

APLICAȚIA 1

Se propune rezolvarea grinzii continue din fig. 6.4. utilizând metoda forțelor, trasarea diagramelor de eforturi **M, T** şi a poziției deformate a grinzii.

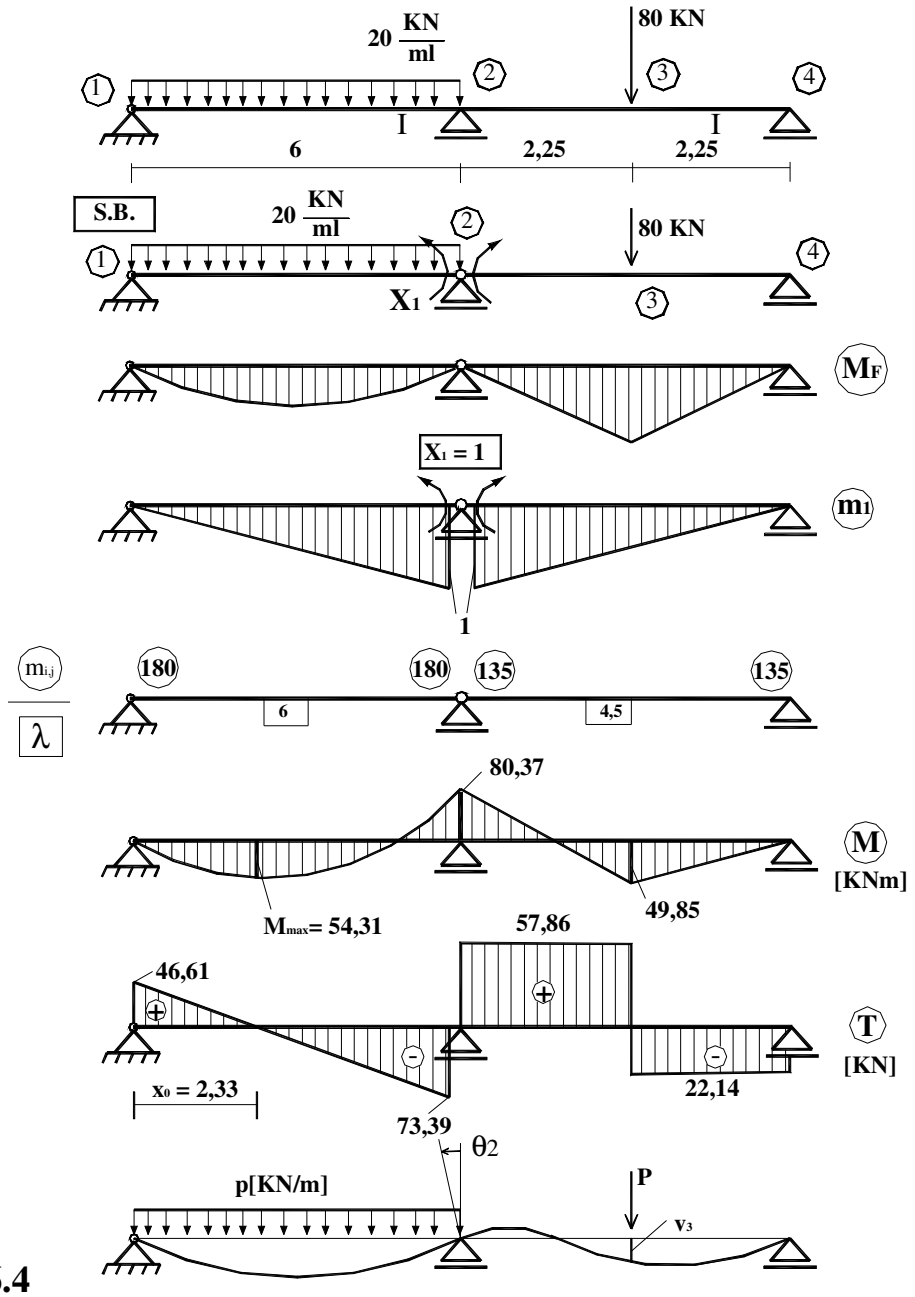


Fig. 6.4

$$n = N = l + r - 3c = 0 + 4 - 3\cdot 1 = 1$$

Se va utiliza **S.B** obținut prin eliminarea legăturii corespunzătoare momentului încovoietor din secțiunea **2**. Sistemul de bază astfel obținut este format din două grinzi simplu rezemate: grinda **1-2** şi grinda **2-4**.

Ecuația de condiție va fi:

$$\Delta_1 = \theta_2^{rel} = 0$$

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{pl^2}{4} = \frac{20\cdot 6^2}{4} = 180$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{3\cdot P\cdot l}{8} = \frac{3\cdot 90\cdot 4{,}5}{8} = 135$$

Se observă că diagramele M_F şi m_1 se trasează foarte uşor pe sistemul de bază ales deoarece grinzile simplu rezemate componente lucrează independent, preluând numai forțe direct aplicate asupra lor.

$$6EI\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \frac{dx}{EI} = 2\cdot 6\cdot 1^2 + 2\cdot 4{,}5\cdot 1^2 = 21$$

$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \frac{dx}{EI} =$$

$$= 6\cdot 180\cdot 1 + 4{,}5\cdot 135\cdot 1 = 1687{,}5$$

$$21X_1 + 1687{,}5 = 0 \Rightarrow X_1 = M_2 = -80{,}357\,KN\cdot m$$

$$M = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1\cdot(-80{,}357)$$

<u>Calculul forței tăietoare</u> (Fig. 6.4.a)

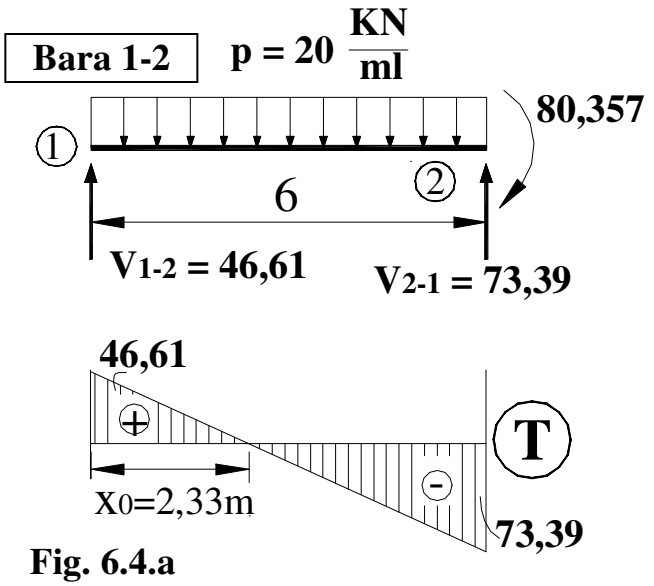


Fig. 6.4.a

$$(\Sigma M)_2 = 0 \Rightarrow V_{1-2}\cdot 6 - 20\cdot 6\cdot 3 + 80{,}357 = 0$$

$$V_{1-2} = \frac{279{,}643}{6} = 46{,}61\,KN$$

$$(\Sigma M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{2-1}\cdot 6 + 80{,}357 + 20\cdot 6\cdot 3 = 0$$

$$V_{2-1} = \frac{440{,}357}{6} = 73{,}39\,KN$$

$$T_{x_0} = 46{,}61 - 20\cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2{,}33m$$

$$M_{\max} = 46{,}61\cdot 2{,}33 - 20\cdot\frac{2{,}33^2}{2} = 54{,}31\,KNm$$

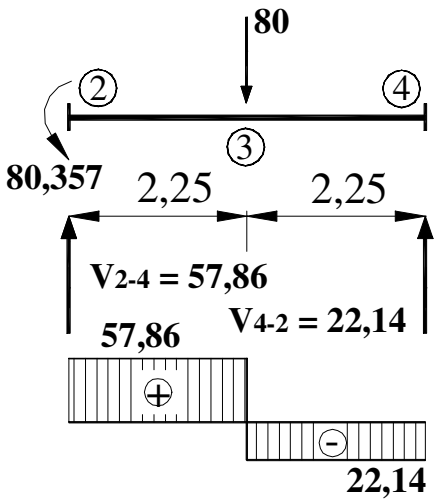
$$(\Sigma M)_4 = 0 \Rightarrow V_{2-4} \cdot 4{,}5 - 80{,}357 - 80 \cdot 2{,}25 = 0$$

$$V_{2-4} = \frac{260{,}357}{4{,}5} = 57{,}86\,KN$$

$$(\Sigma M)_2 = 0 \Rightarrow -V_{4-2} \cdot 4{,}5 + 80 \cdot 2{,}25 - 80{,}357 = 0$$

$$V_{4-2} = \frac{99{,}643}{4{,}5} = 22{,}14\,KN$$

$$M_3 = -(-22{,}14 \cdot 2{,}25) = +49{,}815\,KN \cdot m$$



Determinarea poziției deformate (Fig. 6.4.b)

Se vor calcula deplasarile v_3 si θ_2.

$$v_3 = \int M \cdot m_3^{\circ} \frac{dx}{EI}$$

$$6EIv_3 = -2{,}25 \cdot 80{,}357 \cdot 1{,}125 + 2 \cdot 2{,}25 \cdot 49{,}815 \cdot$$

$$\cdot 1{,}125 + 2 \cdot 2{,}25 \cdot 49{,}815 \cdot 1{,}125 = 300{,}973$$

$$v_3 = 50{,}162 \cdot \frac{1}{EI}[m]$$

$$\theta_2 = \int M \cdot m_2^{\circ} \frac{dx}{EI}$$

$$6EI\theta_2 = -2 \cdot 6 \cdot 80{,}357 \cdot 1 + 6 \cdot 180 \cdot 1 = 115{,}716$$

$$\theta_2 = 19{,}286 \cdot \frac{1}{EI}[radiani]$$

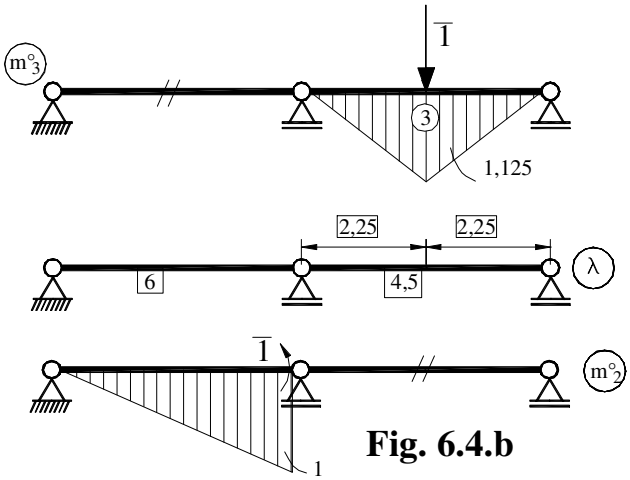


Fig. 6.4.b

Verificare M

$$6EIv_4 = 2 \cdot 6 \cdot 4{,}5 \cdot 80{,}357 - 6 \cdot 180 \cdot 4{,}5 +$$

$$+ 2 \cdot 4{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 80{,}357 - 4{,}5 \cdot 135 \cdot 4{,}5 =$$

$$= +7593{,}736 - 7593{,}75 = -0{,}014$$

$$\varepsilon = 0{,}00018 < 1\%\,.$$

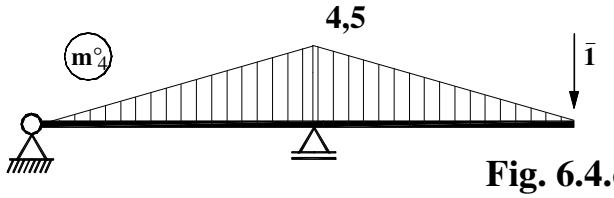


Fig. 6.4.c

APLICAȚIA 2

Se propune rezolvarea grinzii continue din fig. 6.5 utilizând metoda forțelor, trasarea diagramelor de eforturi **M, T** şi a poziției deformate a grinzii.

n = N = l + r – 3c = 0 + 5 - 3·1 = 2

GRINDA ESTE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINATĂ

Se va utiliza **S.B.** obținut prin eliminarea legăturilor corespunzătoare momentelor din dreptul reazemelor intermediare **2** şi **3**.

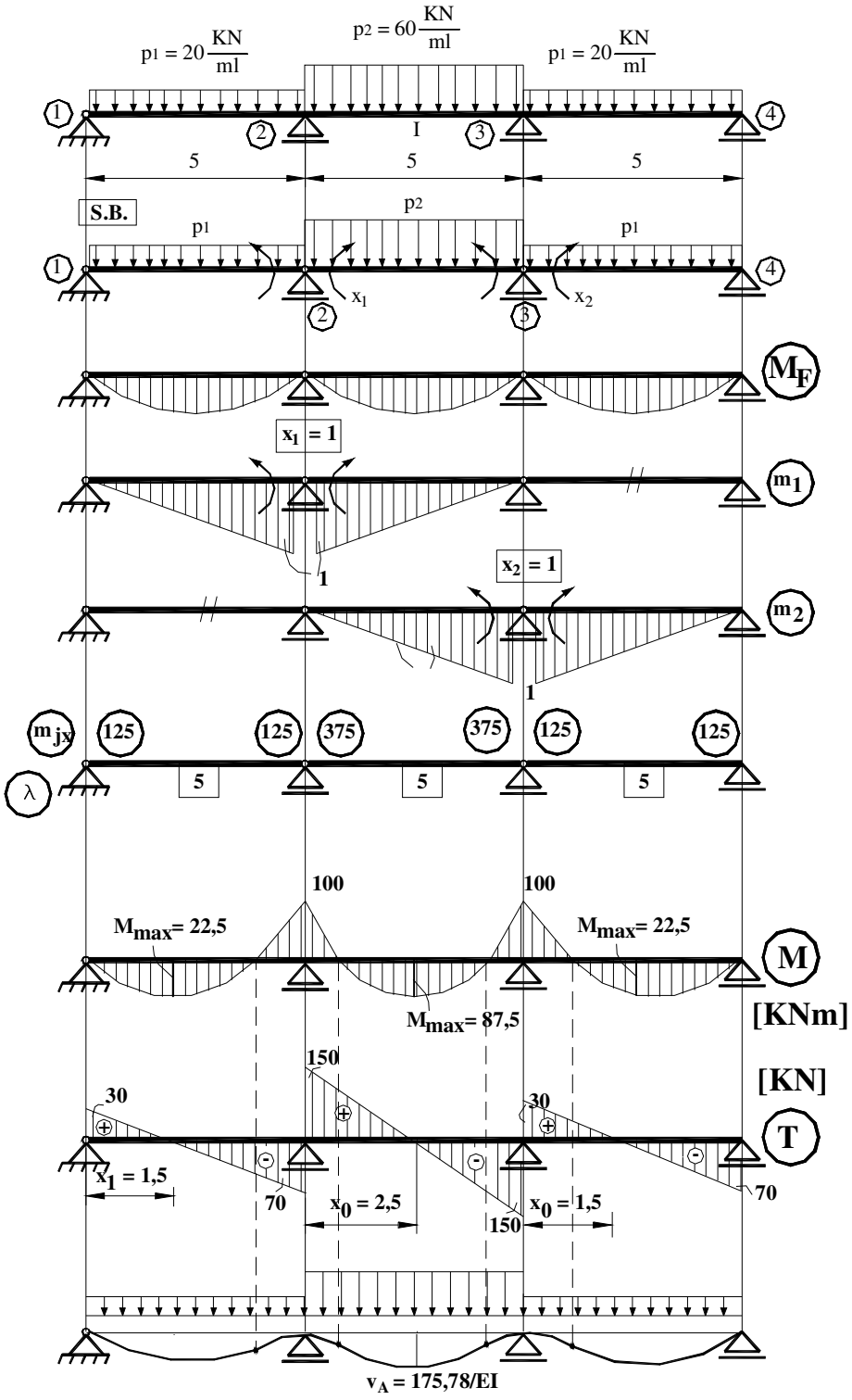

p2 = 60 KN/ml
p1 = 20 KN/ml
p1 = 20 KN/ml
I
5
5
5
S.B.
p1
p2
p1
x1
x2
MF
x1 = 1
m1
1
x2 = 1
m2
1
mjx
125
125
375
375
125
125
λ
5
5
5
100
100
Mmax= 22,5
Mmax= 22,5
Mmax= 87,5
M
[KNm]
150
[KN]
30
30
T
x1 = 1,5
70
x0 = 2,5
x0 = 1,5
150
70
vA = 175,78/EI

Fig. 6.5

Sistemul ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \theta_2^{rel} = 0 \\ \Delta_2 = \theta_3^{rel} = 0 \\ \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

Se observă că pe **S.B** ales, format din trei grinzi simplu rezemate care lucrează independent între ele, este foarte uşor să se traseze diagramele $\mathbf{M_F}$, $\mathbf{m_1}$ şi $\mathbf{m_2}$.

$$m_{12} = m_{21} = m_{34} = m_{43} = \frac{20 \cdot 5^2}{4} = 125$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{60 \cdot 5^2}{4} = 375$$

$$6EI\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \tfrac{dx}{EI} = 2 \cdot 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 5 \cdot 1^2 = 20$$
$$6EI\delta_{12} = 6EI\delta_{21} = 6EI\int m_1 \cdot m_2 \tfrac{dx}{EI} = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$
$$6EI\delta_{22} = 6EI\int m_2^2 \tfrac{dx}{EI} = 2 \cdot 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 5 \cdot 1^2 = 20$$
$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \tfrac{dx}{EI} = 5 \cdot 125 \cdot 1 + 5 \cdot 375 \cdot 1 = 2500$$
$$6EI\Delta_{2F} = 6EI\int m_2 \cdot M_F \tfrac{dx}{EI} = 5 \cdot 375 \cdot 1 + 5 \cdot 125 \cdot 1 = 2500$$

$$\begin{cases} 20X_1 + 5X_2 + 2500 = 0 \\ 5X_1 + 20X_2 + 2500 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X_1 = X_2 = -100KN \cdot m}$$

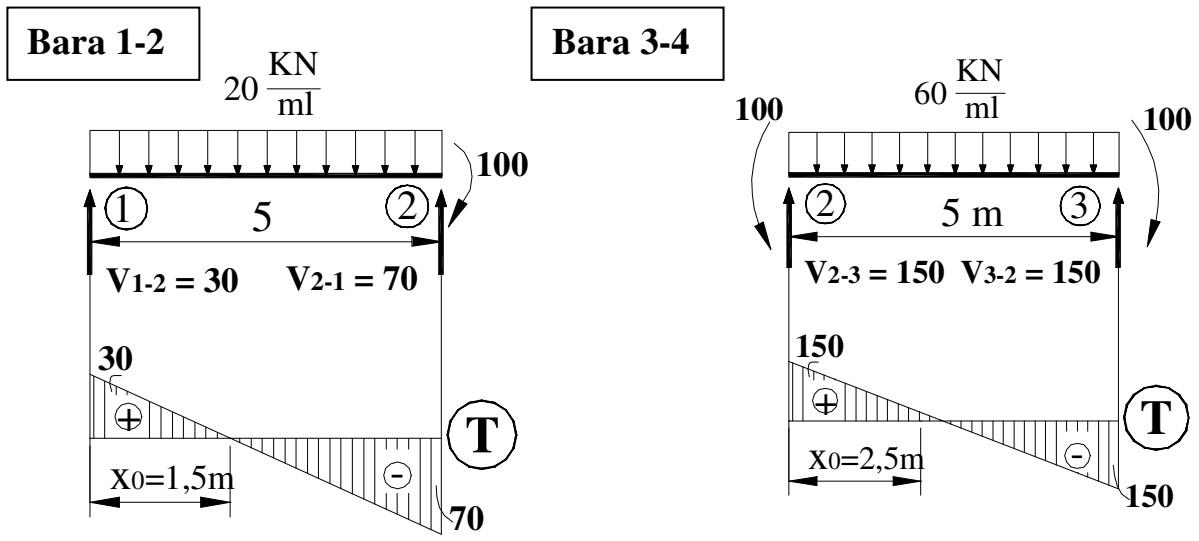


Fig. 6.5.a

Calculul diagramei T (Fig. 6.5.a)

Bara 1-2

$$(\Sigma M)_2 = 0 \Rightarrow V_{1-2} \cdot 5 + 100 - 20 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$V_{1-2} = \frac{150}{5} = 30KN$$

$$(\Sigma M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{2-1} \cdot 5 + 100 + 20 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$V_{2-1} = \frac{350}{5} = 70KN$$

$$\bullet\ M_{\max} = 30 \cdot 1{,}5 - 20 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} = 22{,}5$$

Bara 3-4

$$(\Sigma M)_3 = 0 \Rightarrow V_{2-3} \cdot 5 - 100 + 100 - 60 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$V_{2-3} = V_{3-2} = 150KN$$

$$\bullet\ M_{\max} = 150 \cdot 2{,}5 - 100 - 60 \cdot \frac{2{,}5^2}{2} = 87{,}5$$

OBS. *Încărcarea exterioară fiind simetrică, grinda continuă se comportă simetric. Prin urmare diagrama **M** şi deformata rezultă simetrice, iar diagrama **T** antisimetrică.*

Determinarea poziţiei deformate (Fig. 6.5 şi 6.5.b)

Se va calcula deplasarea verticală v_A.

$$6EIv_a = 6EI \int M \cdot m_a^{\circ} \frac{dx}{EI} =$$

$$= [-2{,}5 \cdot 100 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot 2{,}25 \cdot 87{,}5 \cdot 1{,}25 +$$

$$+ 2{,}5 \cdot 93{,}75 \cdot 1{,}25] \cdot 2 = 1054{,}6875$$

$$v_a = 175{,}78 \cdot \frac{1}{EI}$$

$$m_{2-a} = m_{a-2} = \frac{60 \cdot 2{,}5^2}{4} = 93{,}75$$

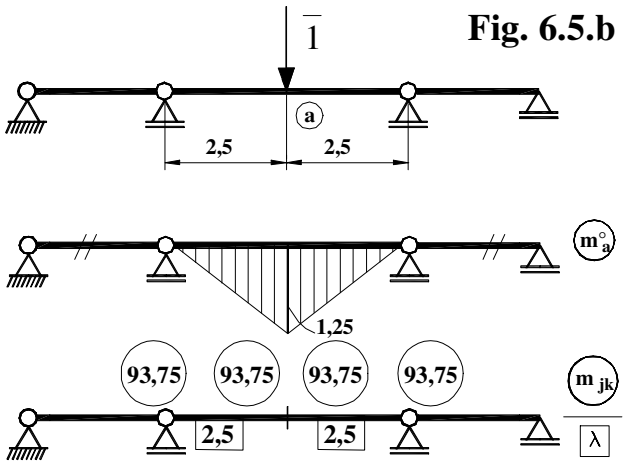


Fig. 6.5.b

Verificarea diagramei M

$$6EIv_3 = 6EI \int M \cdot m_3^0 \frac{dx}{EI} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 5 - 5 \cdot 125 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 5 - 5 \cdot 375 \cdot 5 =$$

$$= 12500 - 12500 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0\%.$$

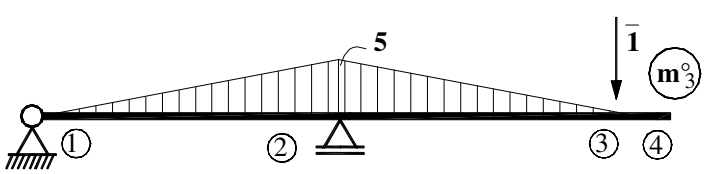


Fig. 6.5.c

CADRE STATIC NEDETERMINATE

APLICAȚIA 1.

Se propune rezolvarea cadrului din **Fig. 6.6** utilizând metoda forțelor, trasarea diagramelor de eforturi **M**, **T**, **N** şi determinarea poziției deformate produsă de forțele exterioare.

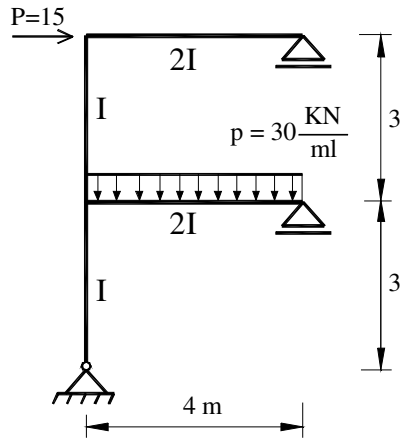


Fig. 6.6

Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$n = N = l + r - 3c = 0+4-3\cdot1 = 1$

Structura este o singură dată static nedeterminată.

Alegerea sistemului de bază (Fig.6.6.a)

Se propun două sisteme de bază diferite. Rezolvarea se va face folosind **S.B$_1$**.

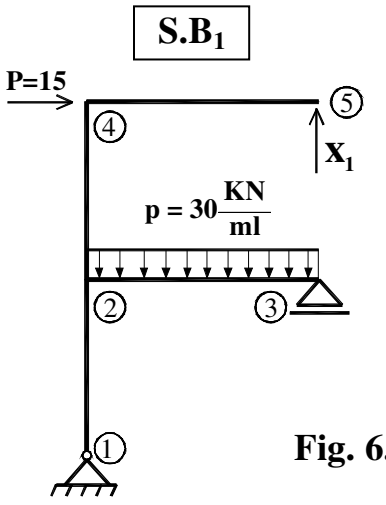
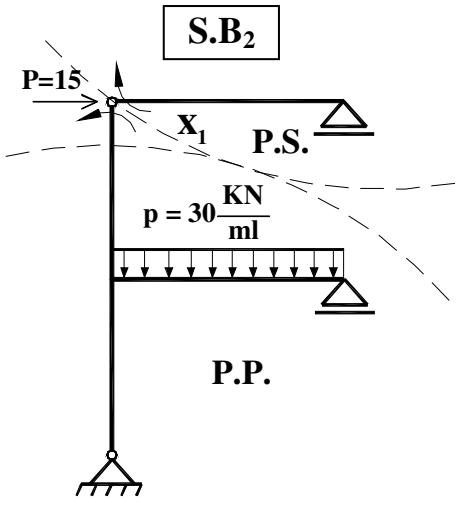


Fig. 6.6.a

CADRU SIMPLU REZEMAT



CADRU COMPUS

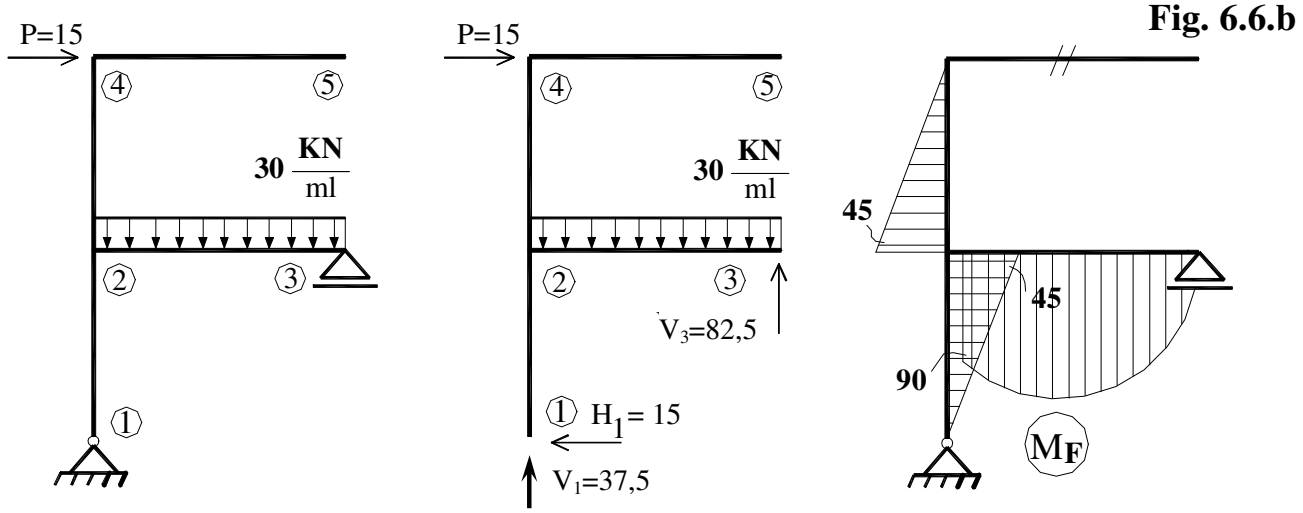
Ecuația de condiție pentru S.B$_1$ este:

$$\Delta_1 = v_5 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

Rezolvarea S.B$_1$

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B$_1$: M$_F$ (Fig. 6.6.b)

Fig. 6.6.b



$$(\Sigma M)_3 = 0 \Rightarrow -V_1 \cdot 4 - 30 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 15 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 37{,}5KN$$

$$(\Sigma M)_1 = 0 \Rightarrow -V_3 \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_3 = 82{,}5KN$$

Acțiunea necunoscutei X$_1$=1 pe S.B$_1$: m$_1$ (Fig. 6.6.c)

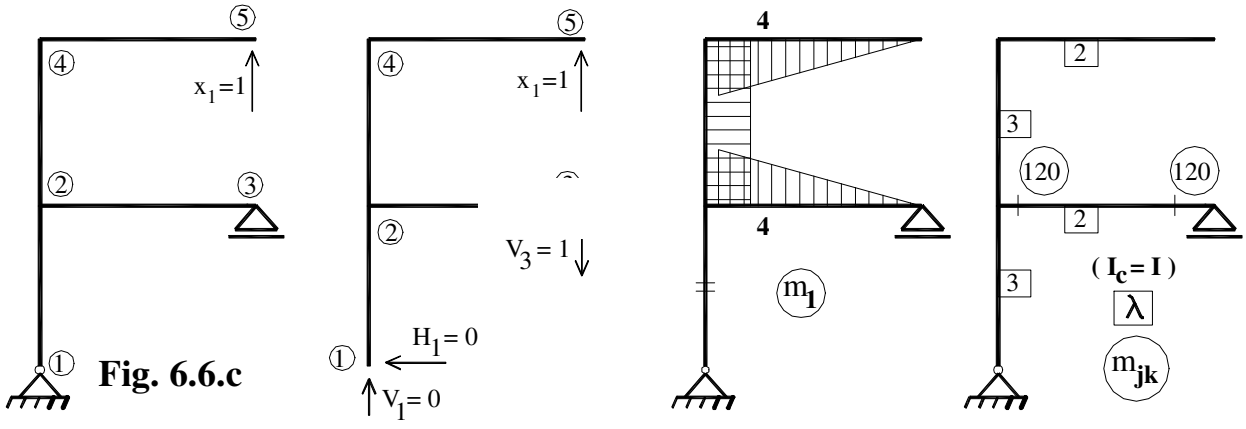


Fig. 6.6.c

Calculul lungimilor transformate si al factorilor de incărcare

$$(\Sigma M)_1 = 0 \Rightarrow V_3 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 0$$
$$V_3 = 1$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow \qquad H_1 = 0$$

$$(\Sigma M)_3 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 4 = 0$$
$$V_1 = 0$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{24} = 3 \cdot \frac{I}{I} = 3$$

$$\lambda_{23} = \lambda_{35} = 4 \cdot \frac{I}{2I} = 2$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{pl^2}{4} = \frac{30 \cdot 4^2}{4} = 120$$

Calculul coeficientului necunoscutei şi a termenului liber din ecuația de condiție:

$$6EI_C\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \tfrac{dx}{EI} = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 416$$
$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \tfrac{dx}{EI} = -2 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 4 - 2 \cdot 120 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 45 \cdot 4 = -4020$$

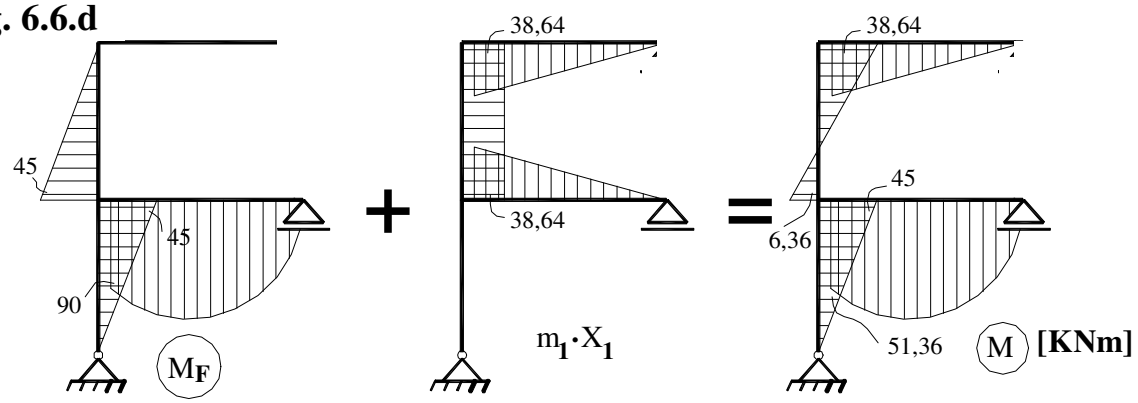
Rezolvarea ecuației de condiție:

$$416X_1 - 4020 = 0 \Rightarrow X_1 = V_5 = 9{,}66KN$$

Calculul momentului final M (Fig.6.6.d)

$$M = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot 9{,}66$$

Fig. 6.6.d



Verificarea diagramei M (Fig. 6.6.e)

Se va verifica dacă rotirea relativă în nodul **4** este zero. Pentru aceasta se va utiliza **S.B$_2$,** cadru static determinat.

$$\theta_4^{rel} = 0 \Rightarrow \theta_4^{rel} = \int M \cdot m_4^{\circ} \frac{dx}{EI}$$

Situația virtuală pentru determinarea diagramei m_4°.

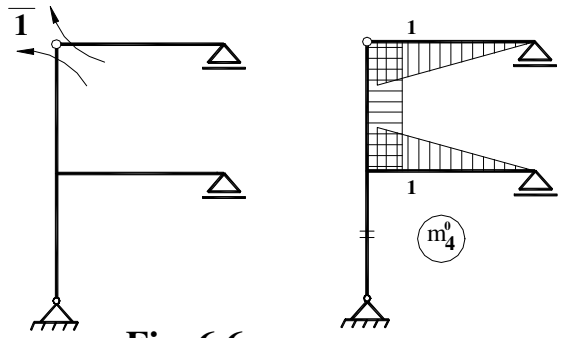
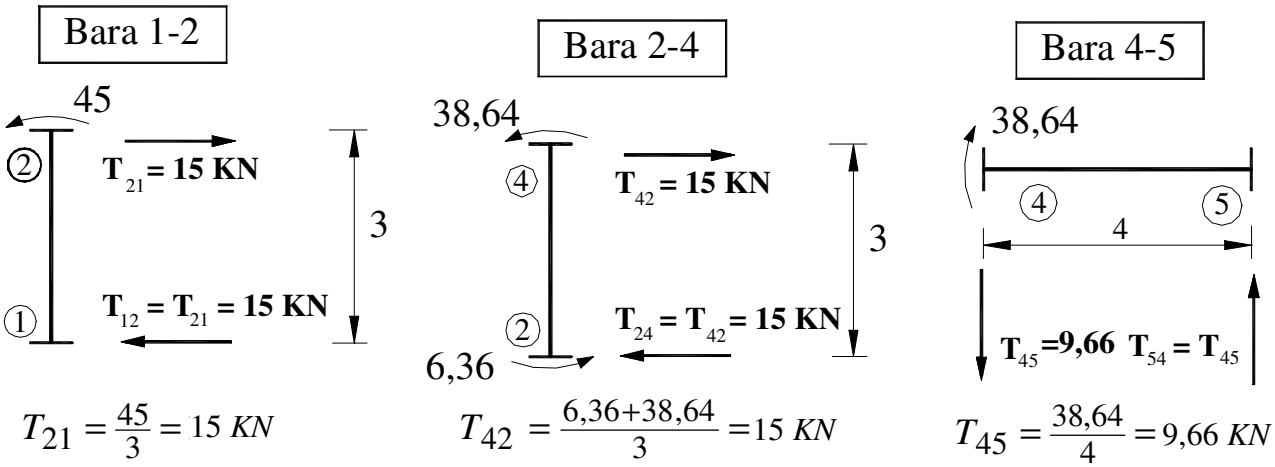


Fig. 6.6.e

$$6EI_C\theta_4^{rel} = 6EI\int M \cdot m_4^{\circ}\frac{dx}{EI} =$$
$$= -2\cdot 2\cdot 51{,}36\cdot 1 - 2\cdot 120\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 6{,}36\cdot 1 +$$
$$+ 3\cdot 3\cdot 38{,}64\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 38{,}64\cdot 1 =$$
$$= -502{,}68 + 502{,}3 = -0{,}38$$
$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{|-502{,}68 + 502{,}32|}{-502{,}68}\cdot 100\% = 0{,}072\% \\ \varepsilon < 1\% \end{cases}$$

Calculul diagramei T (Fig. 6.6.f)



$$T_{21} = \frac{45}{3} = 15\ KN \qquad T_{42} = \frac{6{,}36+38{,}64}{3} = 15\ KN \qquad T_{45} = \frac{38{,}64}{4} = 9{,}66\ KN$$

Fig. 6.6.f

Bara 2-3

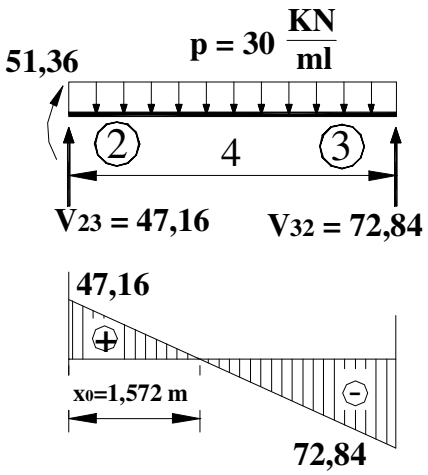


Fig. 6.6.f

$$(\Sigma M)_3 = 0 \Rightarrow V_{23} \cdot 4 + 51{,}36 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

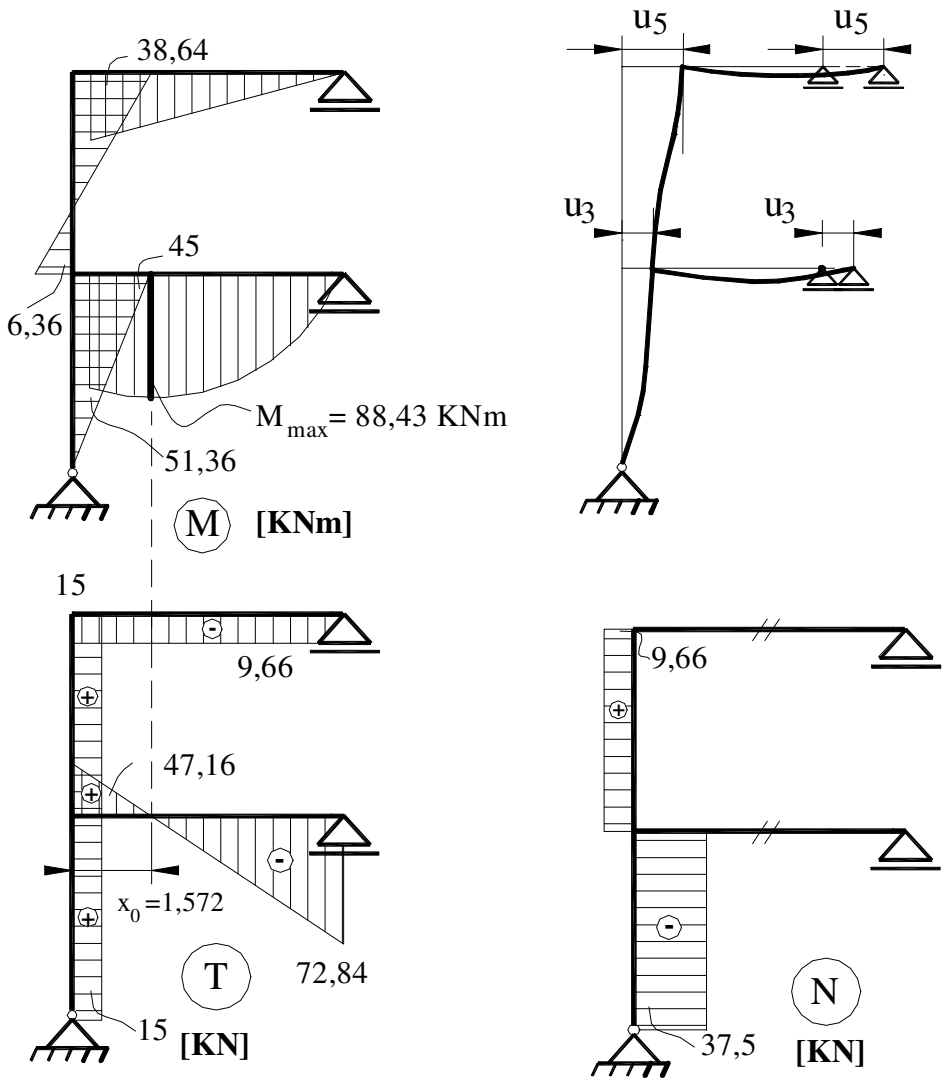
$$V_{23} = \frac{188{,}64}{4} = 47{,}16 KN$$

$$(\Sigma M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{32} \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 2 + 51{,}36 = 0$$

$$V_{32} = \frac{291{,}36}{4} = 72{,}84 KN$$

$$T_{x_0} = 47{,}16 - 30 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1{,}572 m}$$

$$M_{\max} = 47{,}16 \cdot 1{,}572 + 51{,}36 - 30 \cdot \frac{1{,}572^2}{2} = 88{,}43 KN \cdot m$$



Calculul diagramei N (Fig. 6.6.g)

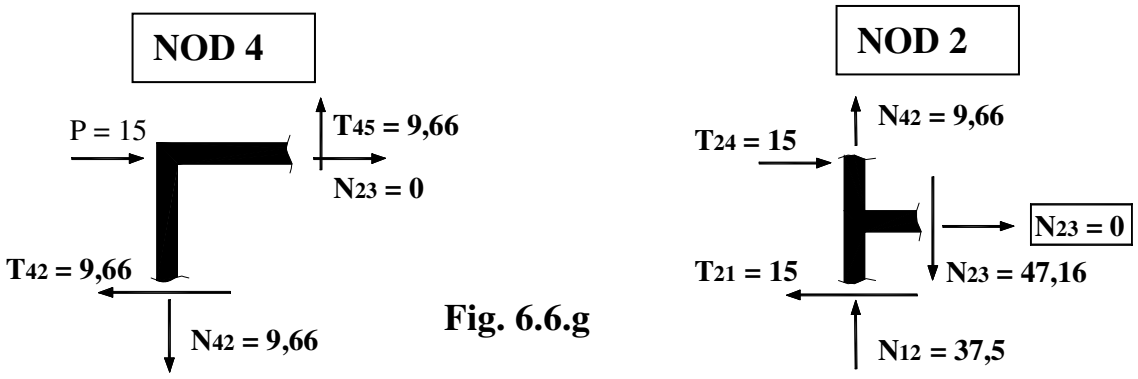


Fig. 6.6.g

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_{2-3} - 15 + 15 = 0$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow 9{,}66 - N_{4-2} = 0$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow +15 - 15 + N_{23} = 0$$

$$\boxed{N_{23} = 0}$$

$$\Sigma X_i = 0 \Rightarrow N_{12} + 9{,}66 - 47{,}16$$

$$\boxed{N_{12} = 37{,}5}$$

Determinarea poziției deformate (fig. 6.6.h)

Se vor calcula deplasările orizontale din reazemele simple **3** şi **5.** Se va utiliza **S.B$_1$** în situația virtuală de încărcare.

$$u_3 = \int M \cdot m_3^{o} \frac{dx}{EI}; \quad u_5 = \int m_5^{o} \frac{dx}{EI}.$$

Situația virtuală pentru calculul deplasării u$_3$

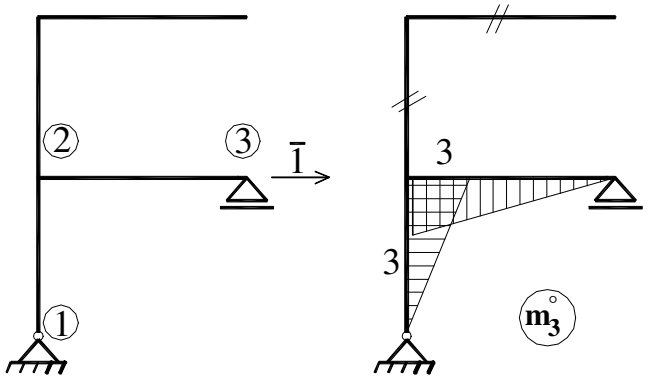


Fig. 6.6.h

$$6EI_c u_3 = 6EI \int m_3^{\circ} M \frac{dx}{EI} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 45 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 51{,}36 \cdot 3 + 2 \cdot 120 \cdot 3$$

$$= 2146{,}321$$

$$u_3 = 357{,}72 \cdot \frac{1}{EI}$$

Situaţia virtuală pentru calculul deplasării u_5

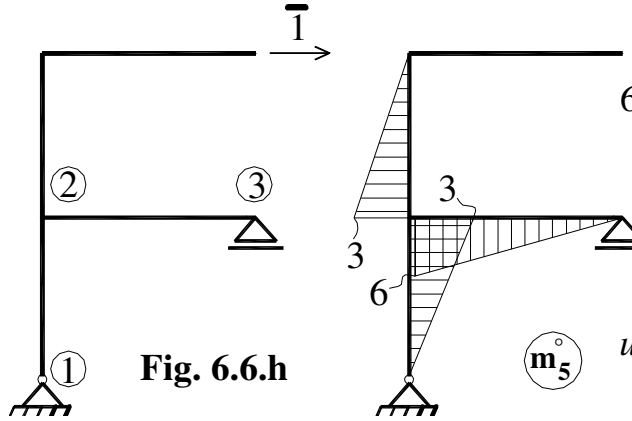


Fig. 6.6.h

$$6EI_c u_5 = 6EI \int m_5^o M \frac{dx}{EI} =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 45 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 51{,}36 \cdot 6 + 2 \cdot 120 \cdot 6 +$$
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 6{,}36 \cdot 3 - 3 \cdot 38{,}64 \cdot 3 =$$
$$= 3249{,}36$$
$$u_5 = 541{,}56 \cdot \frac{1}{EI}$$

OBS. *Nodurile **2** şi **4** se translatează şi se rotesc. Rotirile θ_2 şi θ_4 nu au fost calculate, desenarea poziţiei deformate fiind posibilă prin respectarea legăturilor exterioare şi fibrelor întinse indicate de diagrama **M**.*

Calculul reacţiunilor R (fig. 6.6.i)

Cunoscând diagramele de eforturi **T** şi **N** este posibilă determinarea reacţiunilor cadrului dat.

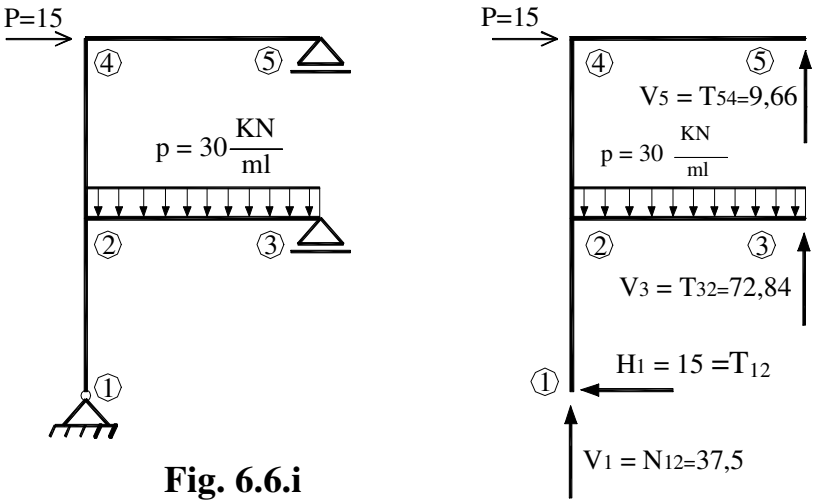


Fig. 6.6.i

Se propune determinarea diagramei de moment **M** utilizând şi **S.B$_2$.**

APLICAȚIA 2

Se propune rezolvarea cadrului static nedeterminat din fig. 6.7 utilizând metoda forțelor, trasarea diagramelor de eforturi **M**, **T**, **N** şi determinarea poziției deformate produsă de forțele exterioare.

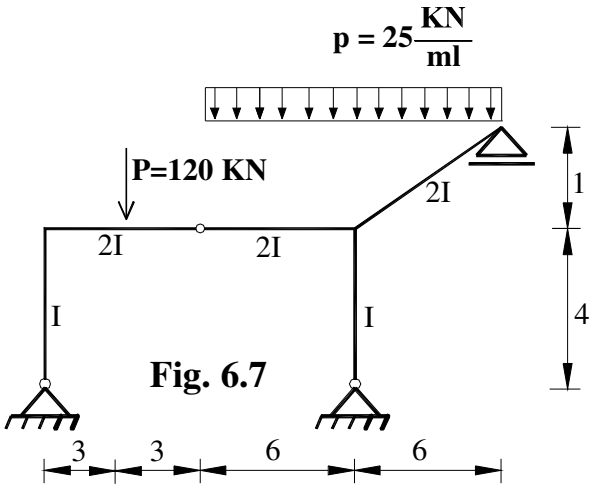


Fig. 6.7

Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$N = N = l + r - 3c = 2 + 5 - 3 \cdot 2 = 1$

STRUCTURA ESTE O SINGURĂ DATĂ STATIC NEDETERMINATĂ.

Alegerea sistemului de bază: (fig. 6.7.a)

Se propun două sisteme de bază diferite: $\mathbf{S.B_1}$ şi $\mathbf{S.B_2}$.
Se va rezolva structura utilizând sistemul de bază $\mathbf{S.B_1}$

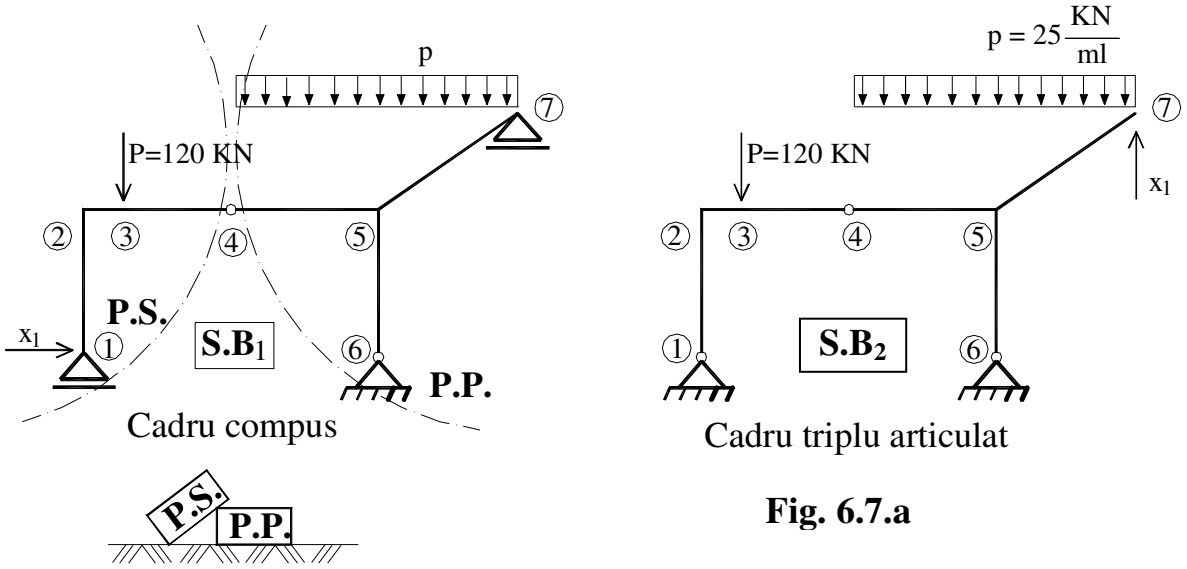


Fig. 6.7.a

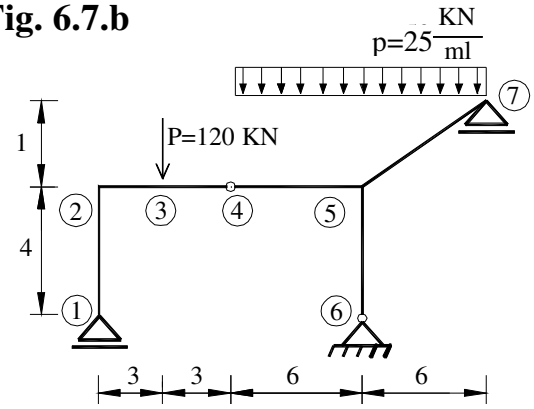
Ecuația de condiție pentru S.B$_1$:

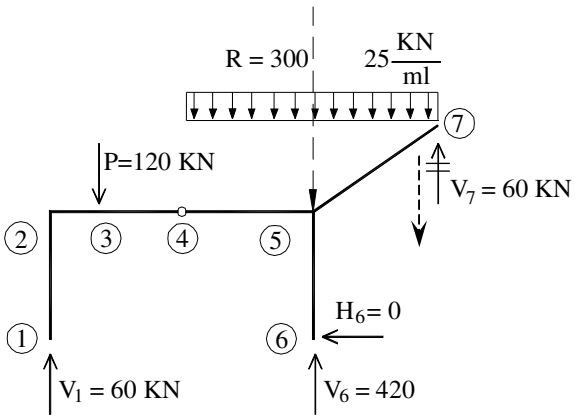
$$\Delta_1 = u_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

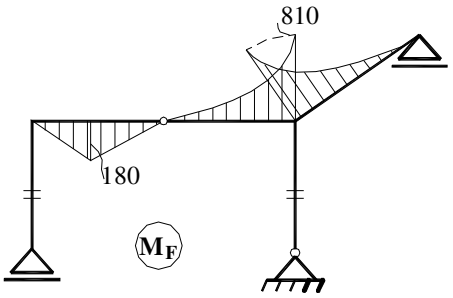
Rezolvarea sistemului de bază S.B$_1$.

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B$_1$: M$_F$ (fig. 6.7.b)

Fig. 6.7.b







$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_6 = 0$$

$$(\sum M)_4^{ST} = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 6 - 120 \cdot 3 = 0$$

$$V_1 = 60KN$$

$$(\sum M)_6 = 0 \Rightarrow -V_7 \cdot 6 - 120 \cdot 9 + 60 \cdot 12 = 0$$

$$V_7 = \frac{360}{6} = -60KN$$

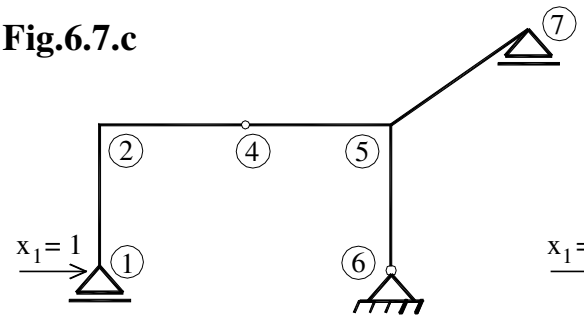
$$(\sum M)_4^{DR} = 0 \Rightarrow -V_6 \cdot 6 + 300 \cdot 6 + 60 \cdot 12 = 0$$

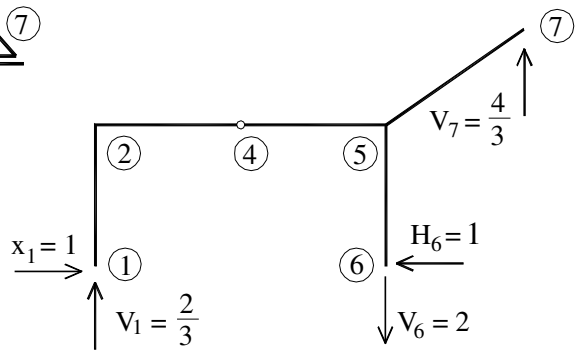
$$V_6 = 420KN$$

Verificare: $\sum Y_i = 60 + 420 - 120 - 300 - 60 = 0$

Acțiunea necunoscutei X$_1$ = 1 pe S.B$_1$: m$_1$ (fig. 6.7.c)

Fig.6.7.c





$$(\sum M)_4^{ST} = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 = 0$$

$$V_1 = \frac{2}{3}$$

$$(\sum M)_6 = 0 \Rightarrow -V_7 \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 12 = 0$$

$$V_7 = \frac{4}{3}$$

$$(\sum M)_4^{DR} = 0 \Rightarrow V_6 \cdot 6 + 1 \cdot 4 - \frac{4}{3} \cdot 12 = 0$$

$$V_6 = 2$$

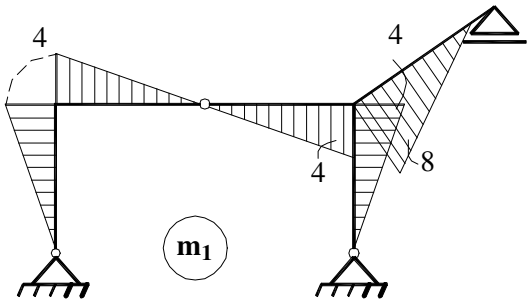


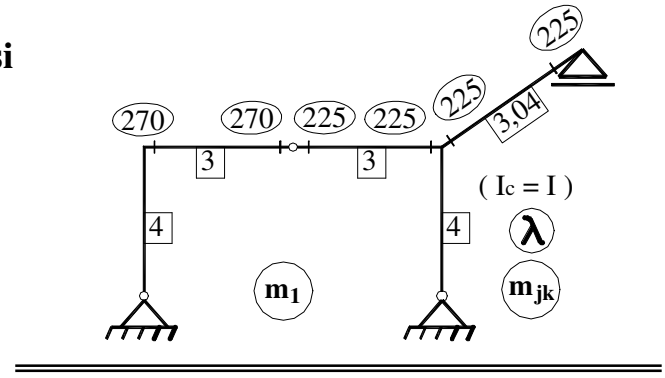
Fig.6.7.c

Calculul lungimilor transformate si al factorilor de incărcare

$$m_{24} = m_{42} = \frac{3Pl}{8} = \frac{3 \cdot 120 \cdot 6}{8} = 270$$

$$m_{45} = m_{54} = \frac{pl^2}{4} = \frac{25 \cdot 6^2}{4} = 225$$

$$m_{57} = m_{75} = \frac{pl^2}{4} = \frac{25 \cdot 6^2}{4} = 225$$



Calculul coeficientului necunoscutei δ_{11} şi a termenului liber Δ_{1F}

$$6EI_c\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \frac{dx}{EI} = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3{,}04 \cdot 8 \cdot 8 =$$

$$= 837{,}12$$

$$6EI_c\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \frac{dx}{EI} = -3 \cdot 270 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 810 \cdot 4 + 3 \cdot 225 \cdot 4 - 2 \cdot 3{,}04 \cdot 810 \cdot 8 +$$

$$+ 3{,}04 \cdot 225 \cdot 8 = -53906{,}4$$

Calculul necunoscutei $X_1 = H_1$

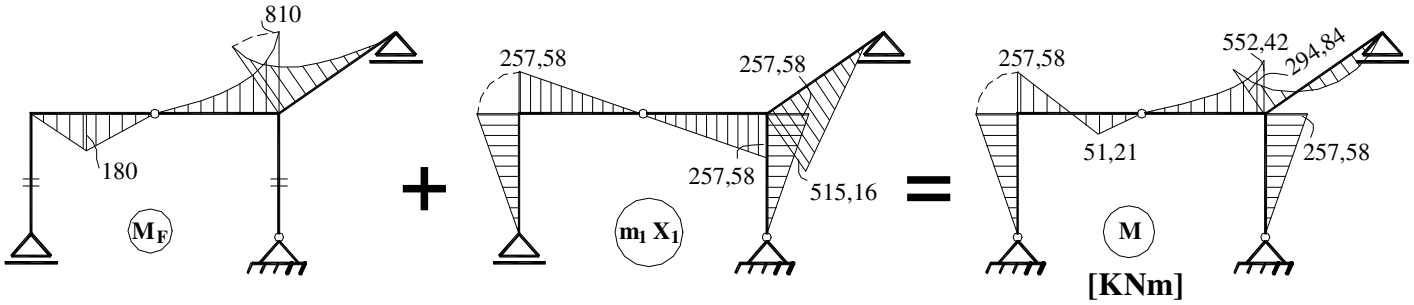
$$837{,}12\, X_1 - 53906{,}4 = 0 \Rightarrow X_1 = H_1 = 64{,}395\ KN$$

Calculul momentului final M (Fig. 6.7.d)

Se va utiliza simultan principiul superpoziției si al proporționalității:

$$M = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot 64{,}395$$

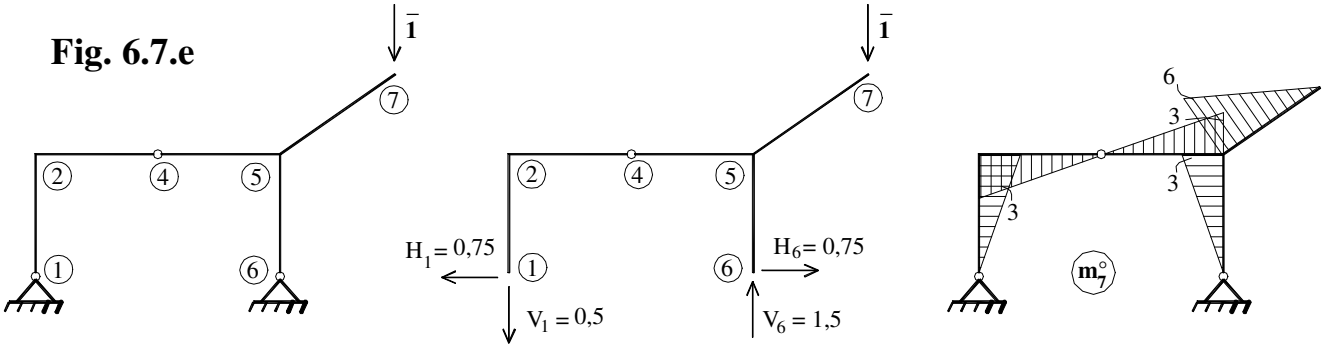
Fig. 6.7.d



Verificarea diagramei M (Fig. 6.7.e)

Se va verifica dacă deplasarea verticală v_7, din secțiunea **7,** rezultă zero. Pentru aceasta se construieşte situația virtuală de încărcare , cerută de formula Maxwell-Mohr, pe sistemul de bază **S.B$_2$.**

Fig. 6.7.e



$$v_7 = \int m_7^0 M \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6EIv_7 = -2\cdot 4\cdot 3\cdot 257,58 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot 257,58 + 3\cdot 270\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3\cdot 552,42 -$$
$$- 2\cdot 225\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot 257,58 + 2\cdot 3,04\cdot 6\cdot 294,84 - 3,04\cdot 225\cdot 6 =$$
$$= -23129,28 + 23129,323 \Rightarrow \varepsilon << 1\%$$

Calculul forțelor tăietoare T (Fig. 6.7.f) şi al forțelor axiale (Fig. 6.7.g)

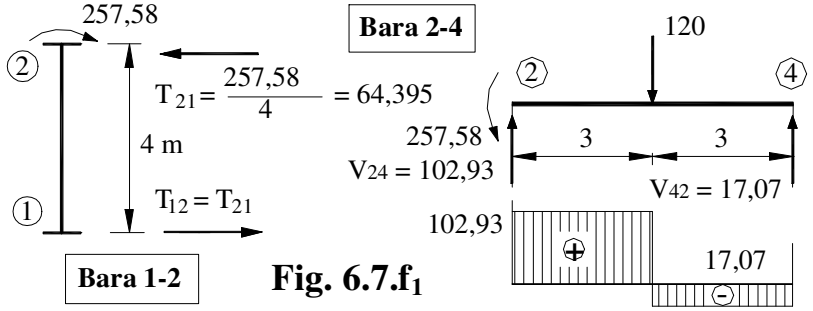


Fig. 6.7.f$_1$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_{24}\cdot 6 - 257,58 - 120\cdot 3 = 0$$
$$V_{24} = \frac{617,58}{6} = 102,93KN$$
$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_{42}\cdot 6 + 120\cdot 3 - 257,58 = 0$$
$$V_{42} = \frac{102,42}{6} = 17,07KN$$

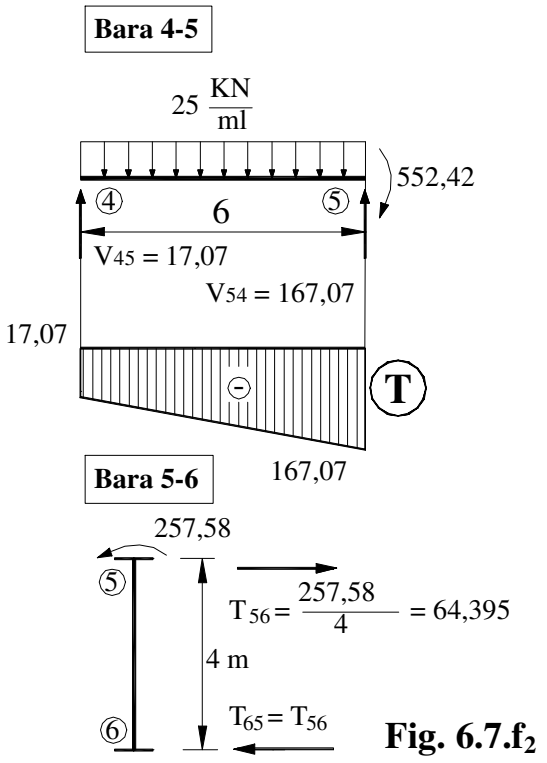


Fig. 6.7.f$_2$

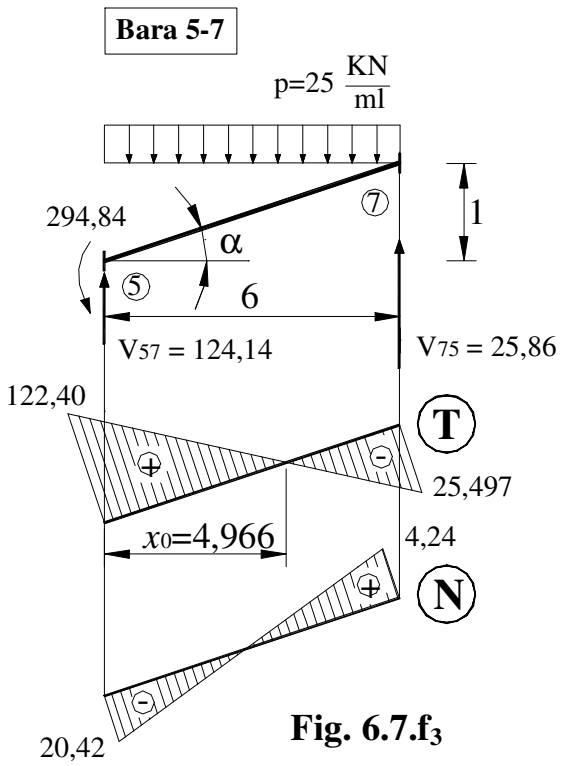


Fig. 6.7.f$_3$

$$(\sum M)_5 = 0 \Rightarrow V_{45} \cdot 6 - 25 \cdot 6 \cdot 3 + 552,42 = 0$$

$$V_{45} = \frac{102,42}{6} = -17,07KN$$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow -V_{54} \cdot 6 + 552,42 + 25 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$V_{54} = \frac{1002,42}{6} = 167,07KN$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{6,0827} = 0,986$$

$$siv\alpha = \frac{1}{6,0827} = 0,164$$

$$(\sum M)_7 = 0 \Rightarrow V_{57} \cdot 6 - 294,84 - 25 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$V_{57} = \frac{744,84}{6} = 124,14KN$$

$$(\sum M)_5 = 0 \Rightarrow -V_{75} \cdot 6 + 25 \cdot 6 \cdot 3 - 294,84 = 0$$

$$V_{75} = \frac{155,16}{6} = 25,86KN$$

$$T_{57} = V_{57} \cdot \cos\alpha = 124,14 \cdot 0,986 = 122,40KN$$

$$T_{75} = -V_{75} \cdot \cos\alpha = -25,86 \cdot 0,986 = -25,497KN$$

$$T_{xo} = V_{57} \cdot \cos\alpha - 25 \cdot x_0 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$x_0 = \frac{124,14}{25} = 4,966m$$

$$M_{\max} = 124,14 \cdot 4,966 - 294,84 - 25 \cdot \frac{4,966^2}{2} = 13,37KNm$$

Bara 5-7

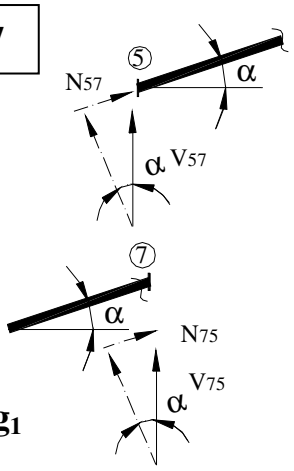


Fig. 6.7.g1

$$N_{57} = -V_{57} \cdot \sin\alpha = -124{,}14 \cdot 0{,}164 = -20{,}42 KN$$

$$N_{75} = +V_{75} \cdot \sin\alpha = 25{,}86 \cdot 0{,}164 = 4{,}24 KN$$

NOD 5

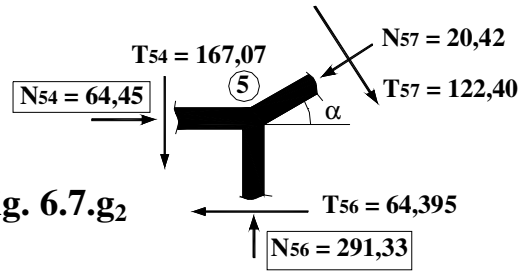


Fig. 6.7.g2

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow N_{54} - 64{,}395 - 20{,}42 \cdot 0{,}986 + 122{,}4 \cdot 0{,}164 = 0$$

$$\boldsymbol{N_{54} = -\,64{,}45\ KN}$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_{56} - 167{,}07 - 20{,}42 \cdot 0{,}164 - 122{,}5 \cdot 0{,}987 = 0$$

$$\boldsymbol{N_{56} = 291{,}33\ KN}$$

$$\boldsymbol{N_{24} = N_{42} = -\,64{,}395\ KN = N_{45}}$$

$$\boldsymbol{N_{54} = N_{45} = 64{,}395\ KN}$$

NOD 2

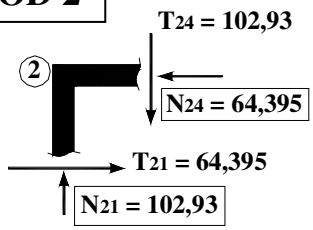


Fig. 6.7.g3

Fig. 6.7.f

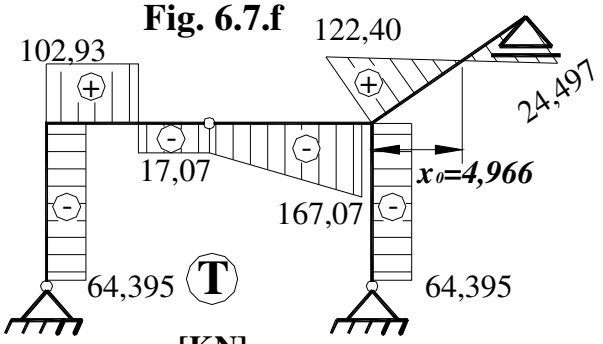
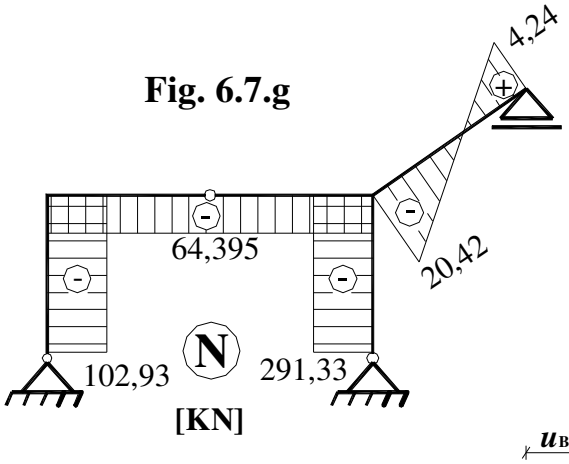


Fig. 6.7.g



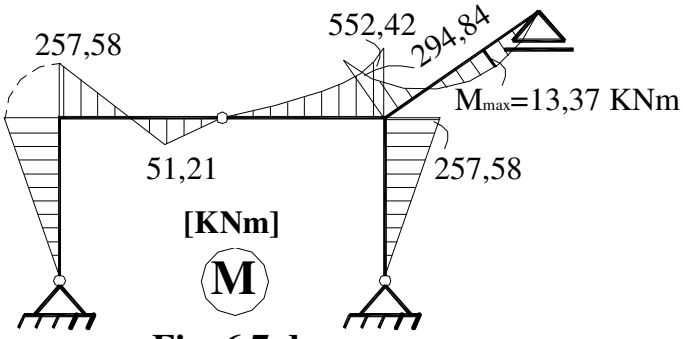


Fig. 6.7.d

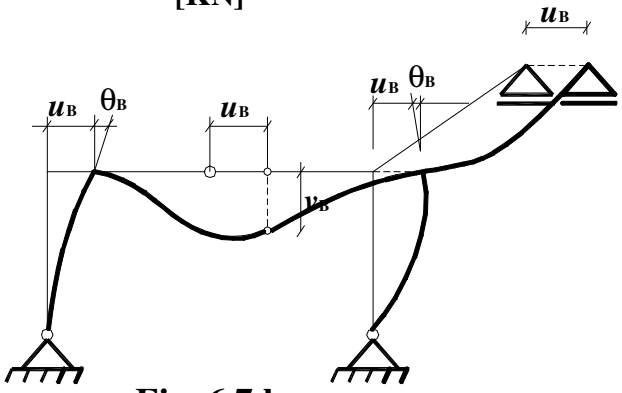
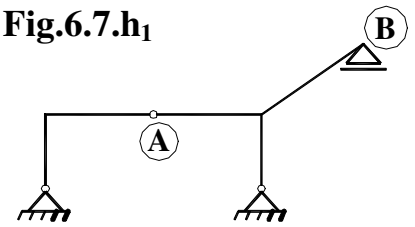


Fig. 6.7.h

Trasarea poziției deformate (Fig.6.7.h)

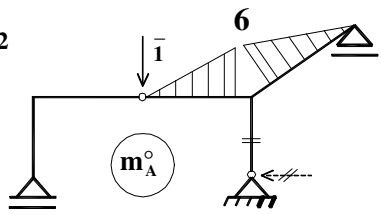
Se calculează două deplasări : $\mathbf{v_A}$ **şi** $\mathbf{u_B}$

Fig.6.7.h$_1$



Situația virtuală pentru $\mathbf{v_A}$: $\mathbf{m_A}$ (**Fig.6.7.h$_2$**)

Fig.6.7.h$_2$

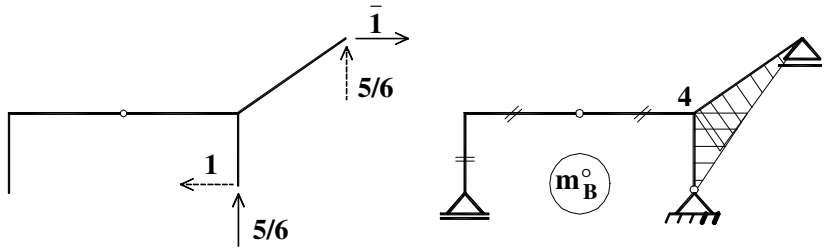


$$6EIv_A = 6EI\int m_A^0 M\,\frac{dx}{EI} = 2\cdot 3\cdot 6\cdot 552{,}42 - 3\cdot 225\cdot 6 + 2\cdot 3{,}04\cdot 6\cdot 294{,}84 + 3{,}04\cdot 225\cdot 6 = 30696{,}883$$

$$v_A = 5116{,}14\cdot\frac{1}{EI}[m]$$

Situația virtuală pentru $\mathbf{u_B}$: $\mathbf{m_B}$ (**Fig.6.7.h$_3$**)

Fig. 6.7.h$_3$



$$6EIu_B = 6EI\int m_B^0\cdot M\,\frac{dx}{EI} = 2\cdot 4\cdot 257{,}58\cdot 4 - 2\cdot 3{,}04\cdot 294{,}84\cdot 4 + 3{,}04\cdot 225\cdot 4 = 3808{,}05$$

$$u_B = \frac{3808{,}05}{6} = 634{,}675\cdot\frac{1}{EI}[m]$$

APLICAȚIA 3

Se propune determinarea diagramei de moment **M** pentru cadrul din **fig. 6.8** în trei ipoteze diferite de încărcare, utilizând metoda forțelor.

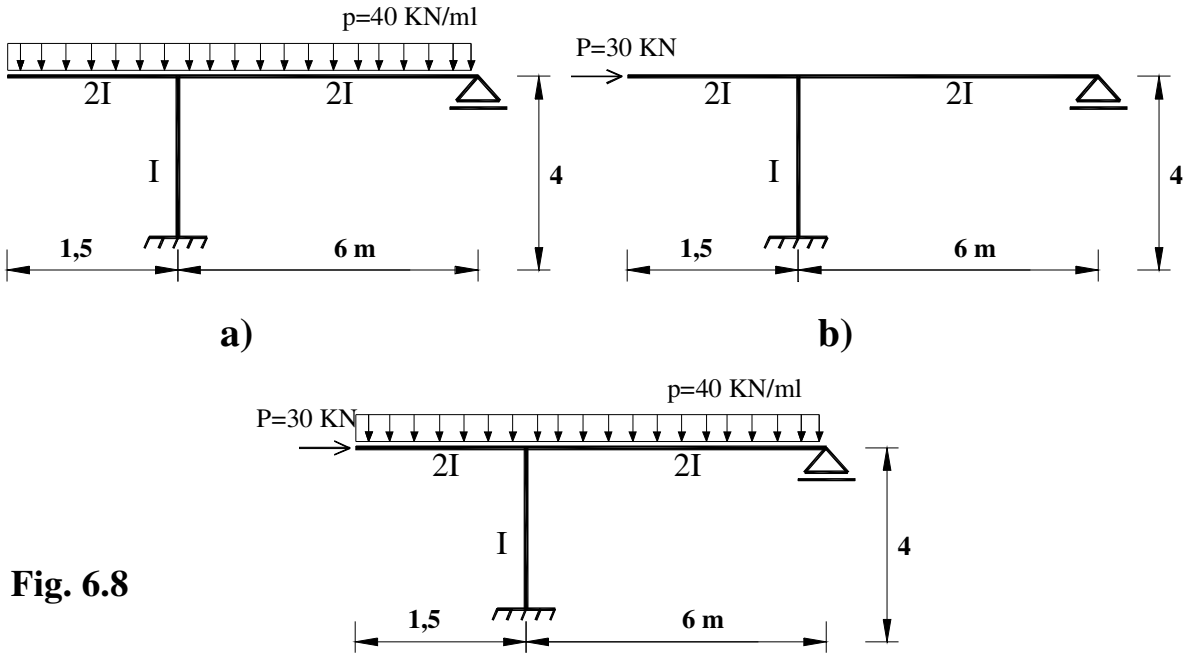


Fig. 6.8

Ipoteza a) *de încărcare*

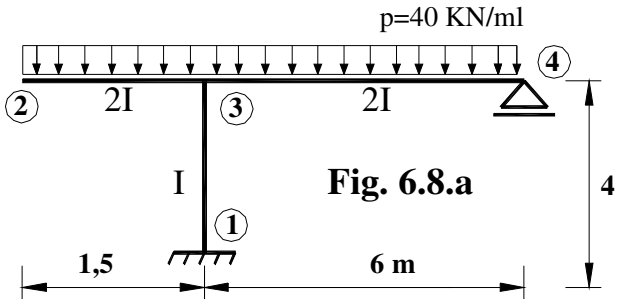


Fig. 6.8.a

Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$$N = l + r - 3c = 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

CADRUL ESTE O SINGURĂ DATĂ STATIC NEDETERMINAT.

Alegerea sistemului de bază (Fig.6.8.a$_1$)

Se propune **S.B$_1$** obținut prin eliminarea legăturii exterioare din reazemul simplu vertical din secțiunea **4.**

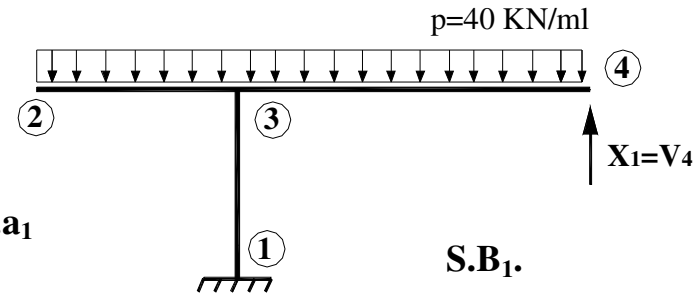


Fig. 6.8.a$_1$ **S.B$_1$.**

Ecuația de condiție: $\Delta_1 = v_4 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{1,F} = 0$

Rezolvarea sistemului de bază S.B$_1$:

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B$_1$: M$_F$ (Fig.6.8.a$_2$)

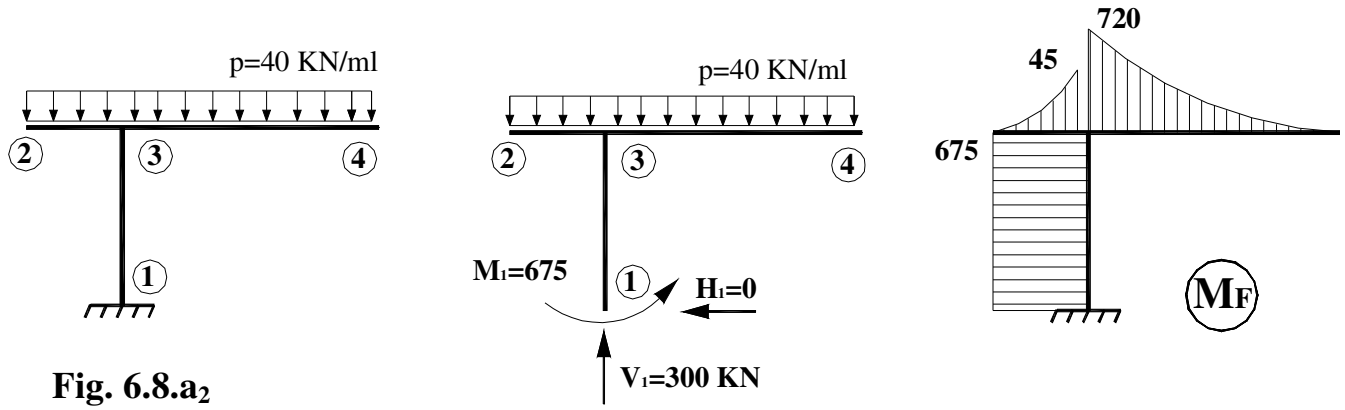


Fig. 6.8.a$_2$

Acțiunea necunoscutei x$_1$ = 1 pe **S.B$_1$: m$_1$ (Fig.6.8.a$_3$)**

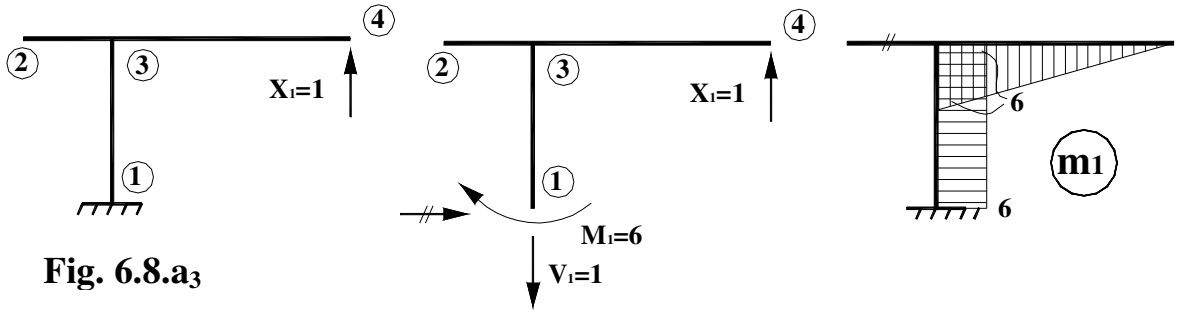


Fig. 6.8.a$_3$

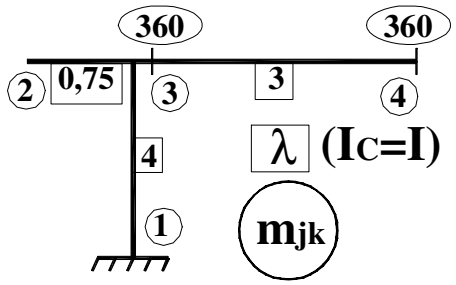
Calculul lungimilor transformate şi a factorilor de încărcare

$$\lambda_{13} = 4 \cdot \frac{I}{I} = 4$$

$$\lambda_{23} = 1{,}5 \cdot \frac{I}{2I} = 0{,}75$$

$$\lambda_{34} = 6 \cdot \frac{I}{2I} = 3$$

$$m_{34} = m_{43} = \frac{pl^2}{4} = \frac{40 \cdot 6^2}{4} = 360$$



Calculul coeficientului necunoscutei δ_{11} şi al termenului liber Δ_{1F}

$$6EI\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \frac{dx}{EI} = 6\cdot 4\cdot 6\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 6\cdot 6 = 1080$$

$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 M_F \frac{dx}{EI} = -6\cdot 4\cdot 675\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot 720\cdot 6 + 3\cdot 360\cdot 6 = -116640$$

Rezolvarea ecuației de condiție

$$1080X_1 - 116640 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X_1 = 108 = V_4}$$

Calculul diagramei finale M (Fig.6.8.a$_4$)

$$M_a = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot 108$$

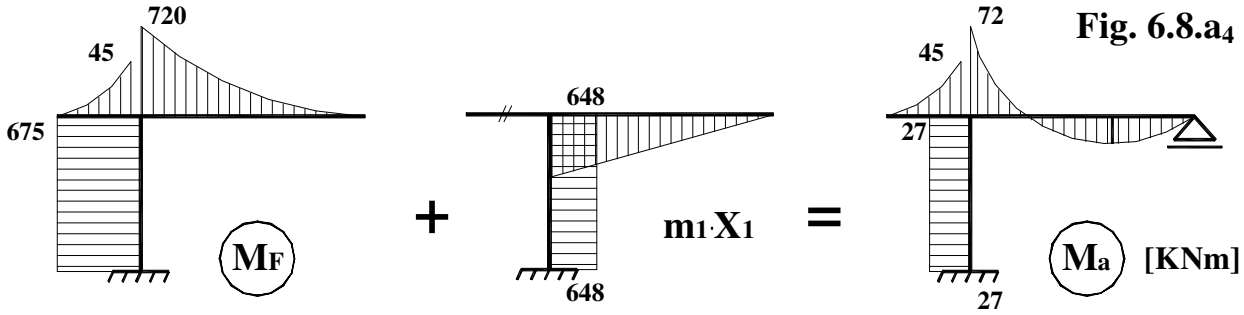


Fig. 6.8.a$_4$

Verificarea diagramei de moment M_a (Fig.6.8.a$_5$)

Se va calcula rotirea din încastrare $\boldsymbol{\theta_1}$, care este zero. Se va utiliza, în situația virtuală de încărcare, structura static determinata de mai jos.

Situația virtuală de încărcare

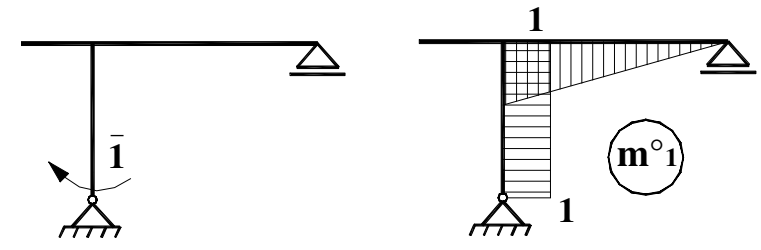


Fig. 6.8.a$_5$

$$6EI\theta_1 = 6EI\int m_1^0 M \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6EI\theta_1 = -6\cdot 4\cdot 27\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 72\cdot 1 + 3\cdot 360\cdot 1 = -1080 + 1080 = 0$$

$\boldsymbol{\varepsilon = 0\ \%}$

Diagrama M pe structura dată în ipoteza de încărcare a este:

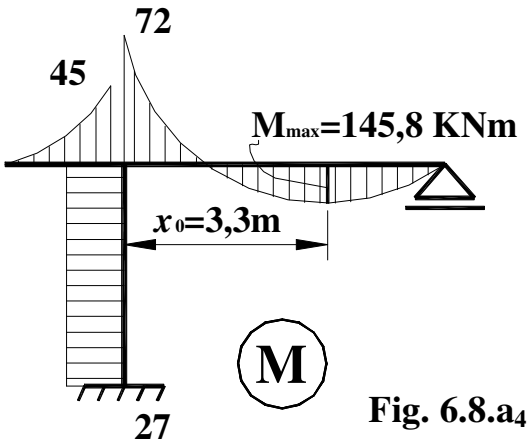


Fig. 6.8.a$_4$

Calculul M_{max} pe bara 3-4 (Fig.6.8.a$_6$)

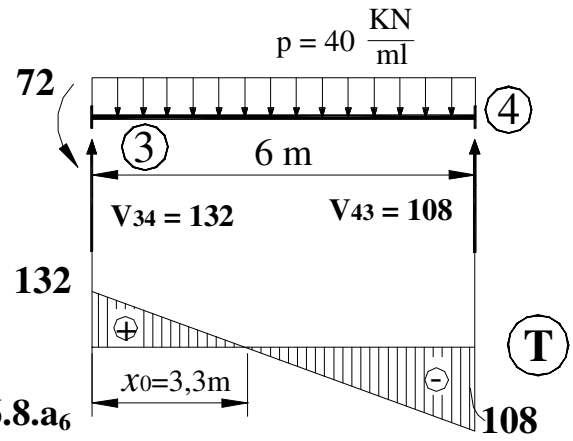


Fig. 6.8.a$_6$

$$(\sum M)_4 = 0 = V_{34} \cdot 6 - 72 - 40 \cdot 6 \cdot 3$$

$$V_{34} = \frac{792}{6} = 132KN$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow -V_{43} \cdot 6 + 40 \cdot 6 \cdot 3 - 72 = 0 \Rightarrow$$

$$V_{43} = \frac{640}{6} = 108KN$$

$$T_{x_0} = 132 - 40 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_0 = 3,3\ m}$$

$$M_{\max} = 132 \cdot 3,3 - 72 - 40 \cdot \frac{3,3^2}{2} = 145,8KNm$$

Ipoteza b) *de încărcare* **(Fig.6.8.b)**

Pentru reducerea volumului de calcul se va folosi tot sistemul de bază **S.B$_1$**, utilizat în cazul de încarcare anterior.

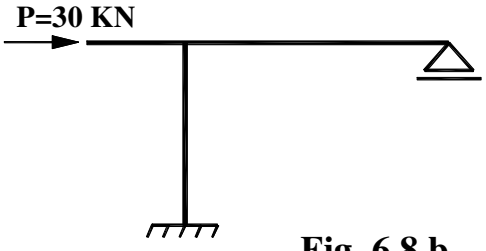


Fig. 6.8.b

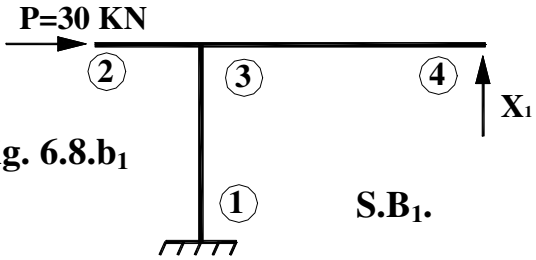


Fig. 6.8.b$_1$ **S.B$_1$.**

Ecuația de condiție: $\Delta_1 = v_4 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$

Rezolvarea sistemului de bază

Acțiunea forțelor exterioare
(Fig. 6.8.b$_2$)

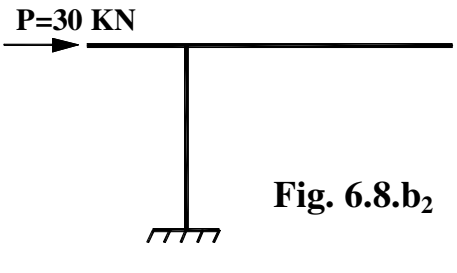
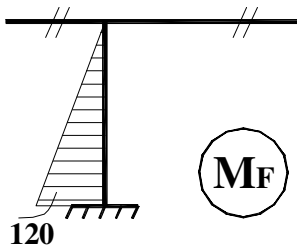


Fig. 6.8.b$_2$



Acțiunea necunoscutei **X_1=1**
(Fig. 6.8.b$_3$)

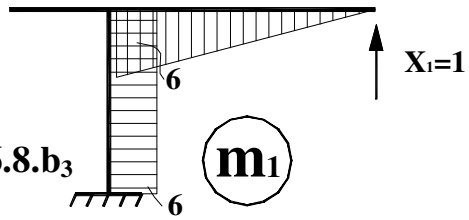


Fig. 6.8.b$_3$

Calculul coeficientului necunoscutei δ_{11} şi al termenului liber.

Coeficientul δ_{11} este cunoscut din cazul anterior.

$$6EI\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \frac{dx}{EI} = 1080$$

$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \frac{dx}{EI} = -3 \cdot 4 \cdot 120 \cdot 6 = -8640$$

Rezolvarea ecuației de condiție:

$$1080X_1 - 8640 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{X_1 = 8 = V_4}$$

Calculul diagramei finale M_b (Fig.6.8.b$_4$)

$$M_b = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot 8$$

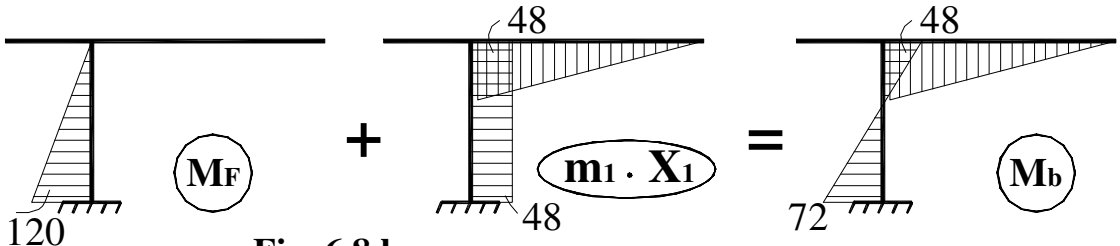


Fig. 6.8.b$_4$

Verificarea diagramei M (Fig.6.8.b$_5$)

Se va calcula rotirea din încastrare, care este zero. Se va utiliza în situația virtuală de încărcare, structura static determinată din **Fig. 6.8.b$_5$**:

Situația virtuală de încărcare:

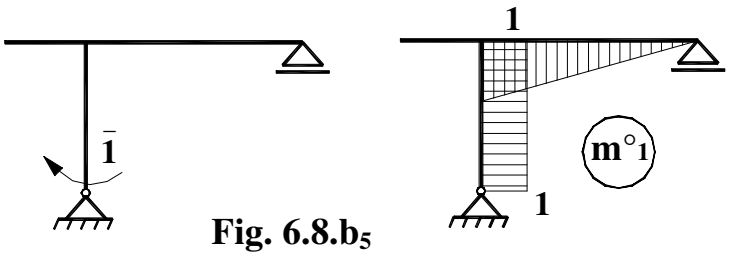


Fig. 6.8.b$_5$

$$\theta_1 = \int m_1^0 M \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6EI\theta_1 = -3\cdot 4\cdot 72\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 48\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 48\cdot 1 = \\ = -864 + 864 = 0$$

$\varepsilon = 0\%$

Diagrama M_b va fi:

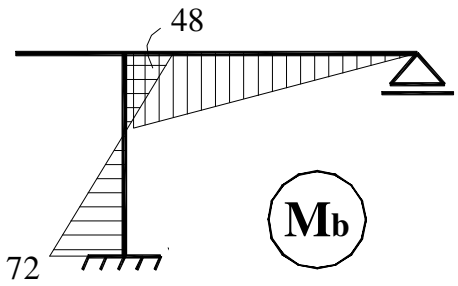


Fig. 6.8.b$_4$

Ipoteza c) *de încărcare* **(Fig.6.8.c)**

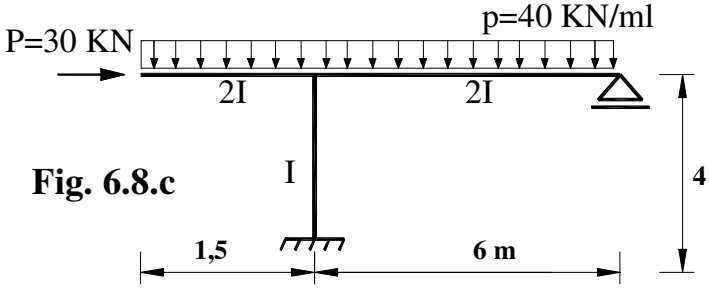


Fig. 6.8.c

Se observă că încărcarea exterioară în ipoteza **c** este suma încărcărilor din ipotezele **a** şi **b**. Prin urmare, pentru obținerea diagramei **M** se va aplica principiul superpoziției, suprapunând diagramele obținute în cazurile anterioare.

M =M_a + M_b (Fig.6.8.c$_1$)

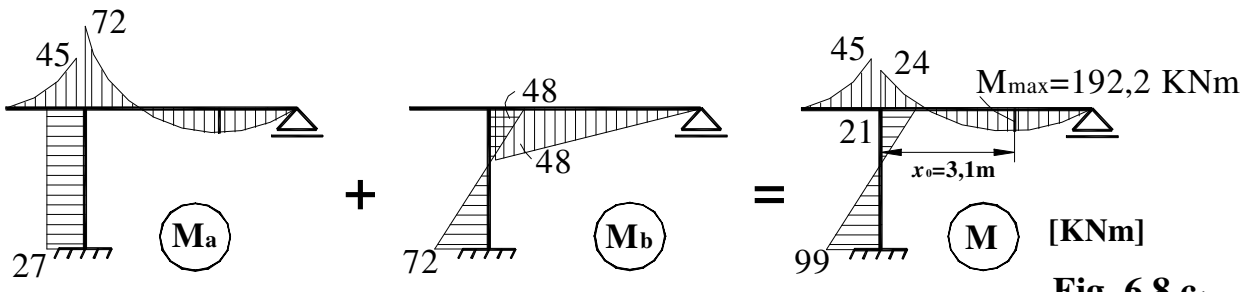
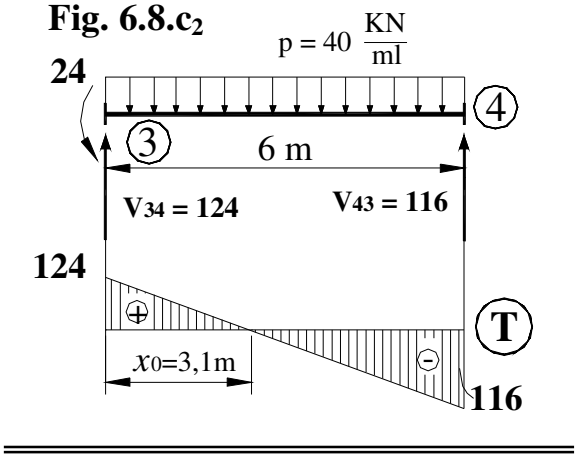


Fig. 6.8.c$_1$

Calculul momentului maxim pe bara 3-4 (Fig.6.8.c$_2$)

Fig. 6.8.c$_2$



$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_{34} \cdot 6 - 24 - 40 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$V_{34} = \frac{744}{6} = 124KN$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow -V_{43} \cdot 6 + 40 \cdot 6 \cdot 3 - 24 = 0$$

$$V_{43} = \frac{696}{6} = 116KN$$

$$T_{x_0} = 124 - 40 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 3,1m$$

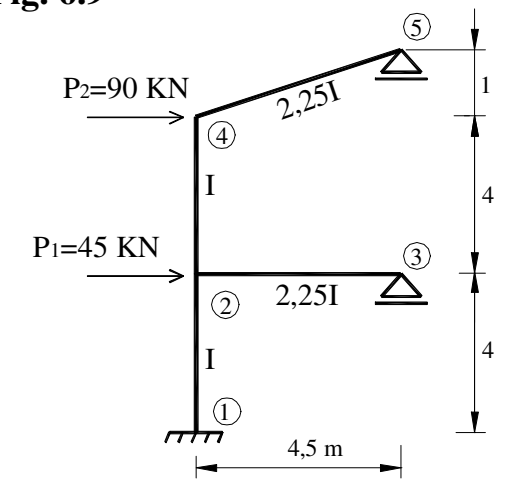
$$M_{\max} = 124 \cdot 3,1 - 24 - 40 \cdot \frac{3,1^2}{2} = 192,2KNm$$

Se observă că față de ipoteza **a** de încărcare valoarea şi poziția momentului maxim este diferită.

APLICAȚIA 4

Pentru cadrul din **fig.6.9** se cere determinarea diagramelor de eforturi **M**, **T**, **N** şi a poziției deformate, utilizând metoda forțelor.

Fig. 6.9



Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$$n = N = l + r - 3c = 0 + 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

STRUCTURA ESTE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINATĂ.

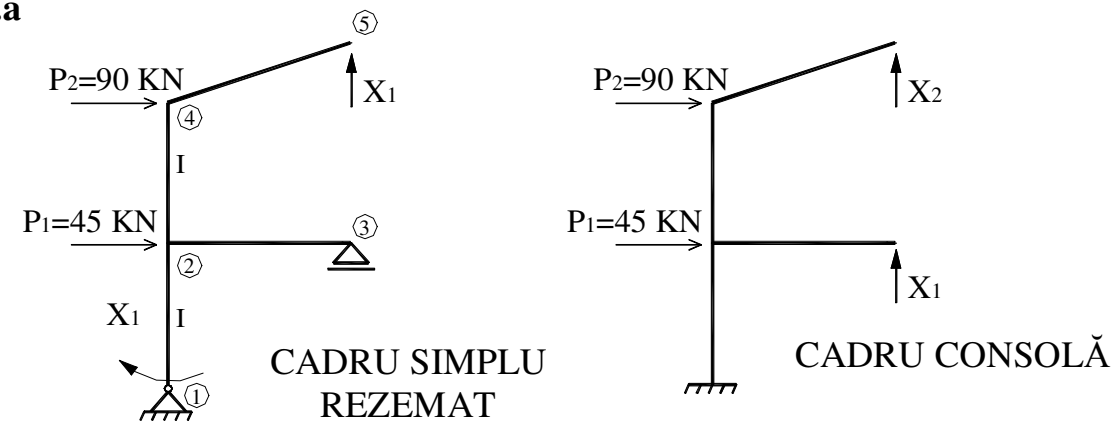
Alegerea sistemului de bază : (**Fig.6.9.a**)

Se propun două sisteme de bază diferite:

S.B$_1$ → obținut prin eliminarea legăturilor exterioare din încastrarea **1** şi reazemul simplu **5**

S.B$_2$ → obținut prin eliminarea legăturilor exterioare din reazemele verticale **3** şi **5**

Fig. 6.9.a



Se va rezolva structura utilizând sistemul de bază **S.B$_1$.**

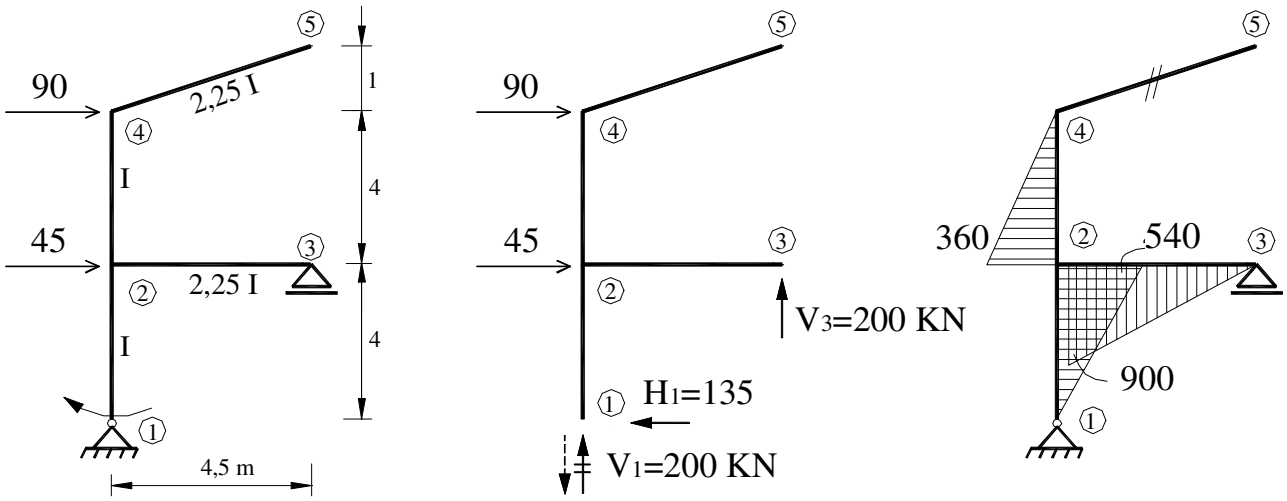
Sistemul ecuațiilor de condiție pentru sistemul de bază S.B$_1$:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \theta_1 = 0 \\ \Delta_2 = v_5 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0\end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază S.B$_1$:

Acțiunea forțelor exterioare : **M$_F$** (**Fig.6.9.b**)

Fig. 6.9.b



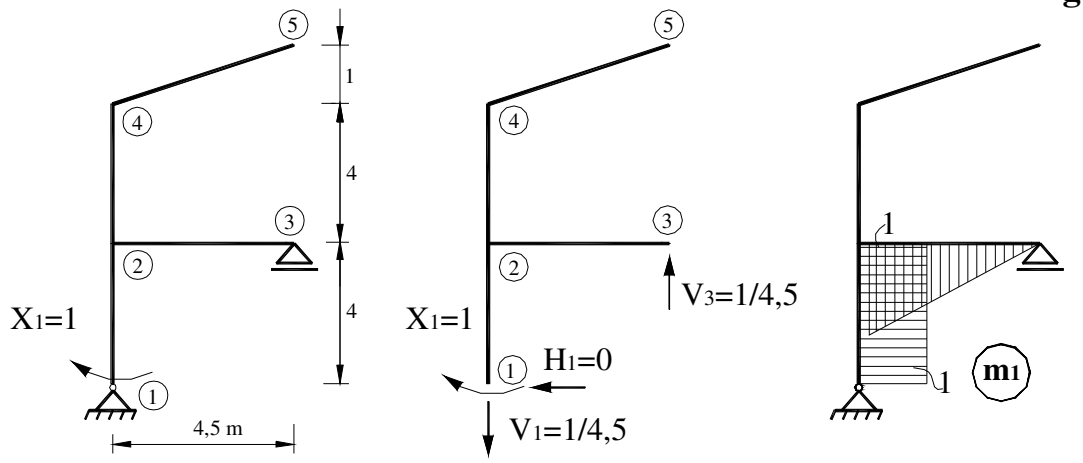
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -H_1 + 45 + 90 = 0 \Rightarrow H_1 = 135KN.$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 4{,}5 + 135 \cdot 4 + 90 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_1 = -\frac{900}{4{,}5} = -200KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_3 \cdot 4{,}5 + 45 \cdot 4 + 90 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_3 = \frac{900}{4{,}5} = 200KN$$

Acțiunea necunoscutei $X_1=1$ pe **S.B$_1$**: **m_1** (**Fig.6.9.c**)

Fig. 6.9.c



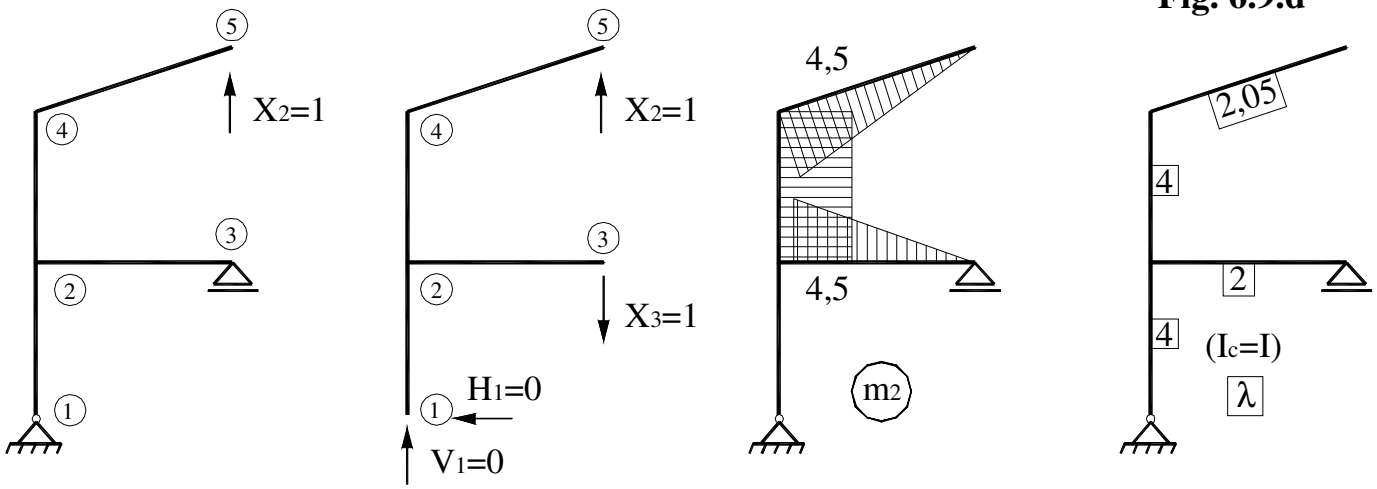
$$\sum X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = 0$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow 1 - V_1 \cdot 4{,}5 = 0 \;\Rightarrow\; V_1 = \frac{1}{4{,}5} KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_3 \cdot 4{,}5 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; V_3 = \frac{1}{4{,}5} KN$$

Acțiunea necunoscutei $X_2 = 1$ pe **S.B$_1$**: **m_2** (**Fig6.9.d**)

Fig. 6.9.d



Calculul coeficienților necunoscutelor şi al termenilor liberi:

Ca si în cazul problemelor anterioare, se vor calcula coeficienții de flexibilitate cu ajutorul formulei Maxwell – Mohr. Rezultatele obținute vor fi apoi introduse in sistemul ecuațiilor de condiție.

$$6EI\delta_{11} = 6EI\int m_1^2 \frac{dx}{EI} = 6\cdot 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 28$$

$$6EI\delta_{12} = 6EI\delta_{21} = 6EI\int m_1\cdot m_2 \frac{dx}{EI} = -2\cdot 2\cdot 4{,}5\cdot 1 = -18$$

$$6EI\delta_{22} = 6EI\int m_2^2 \frac{dx}{EI} = 2\cdot 2\cdot 4{,}5\cdot 4{,}5 + 6\cdot 4\cdot 4{,}5\cdot 4{,}5 + 2\cdot 2{,}05\cdot 4{,}5\cdot 4{,}5 = 650{,}025$$

$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\int m_1\cdot M_F \frac{dx}{EI} = 3\cdot 4\cdot 540\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 900\cdot 1 = 10080$$

$$6EI\Delta_{2F} = 6EI\int m_2\cdot M_F \frac{dx}{EI} = -2\cdot 2\cdot 900\cdot 4{,}5 - 3\cdot 4\cdot 360\cdot 4{,}5 = -35640$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} 28X_1 - 18X_2 + 10080 = 0 \\ -18X_1 + 650{,}025X_2 - 35640 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = M_1 = -330{,}64\,KNm \\ X_2 = V_5 = 45{,}67\,KNm \end{cases}$$

Calculul diagramei M (Fig.6.9.e)

$$M = M_F + m_1\cdot X_1 + m_2\cdot X_2 = M_F + m_1 402{,}41 + m_2\cdot 65{,}97$$

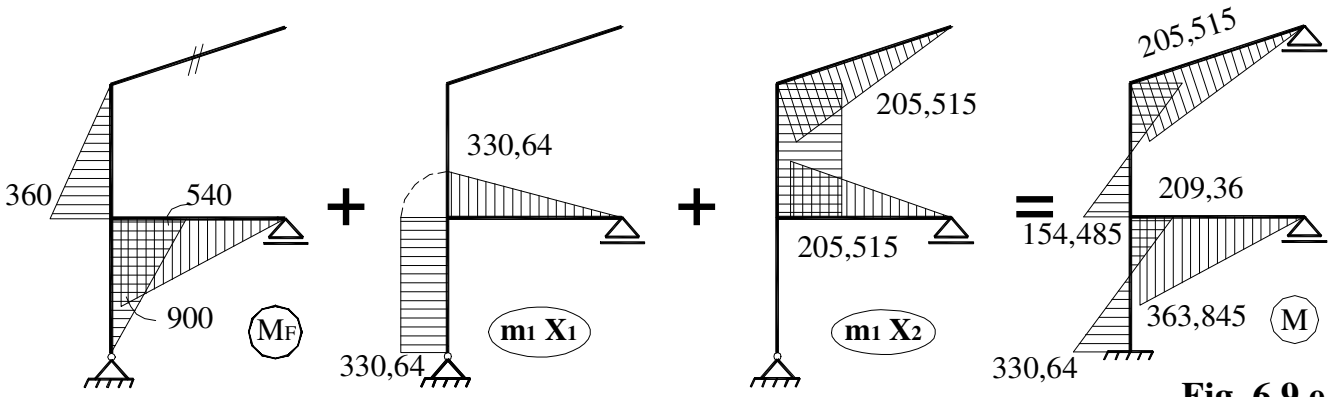


Fig. 6.9.e

Verificarea diagramei M (Fig.6.9.f)

Se va calcula deplasarea verticală din secțiunea **3**, care este zero. Se utilizează în situația virtuală de încărcare structura static determinată din **Fig. 6.9.f**:

Situația virtuală de încărcare pentru calculul deplasării v_3

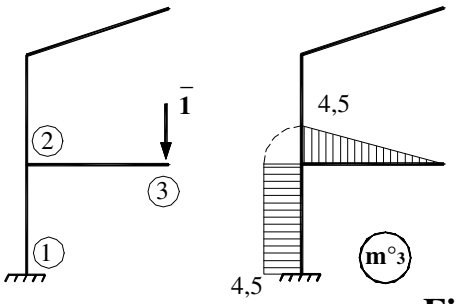


Fig. 6.9.f

Conform formulei Maxwell – Mohr:

$$v_3 = \int m_3^0 \cdot M \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6EIv_3 = 3 \cdot 4 \cdot 330{,}64 \cdot 4{,}5 - 3 \cdot 4 \cdot 209{,}36 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 2 \cdot 363{,}845 \cdot 4{,}5 = 17854{,}56 - 17854{,}65 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon << 1\%.$$

Calculul forțelor tăietoare T (Fig.6.9.g)

Bara 1-2

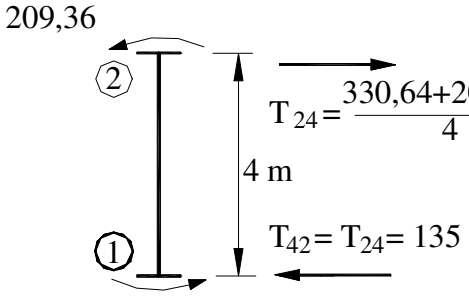


Fig. 6.9.g1

Bara 2-3

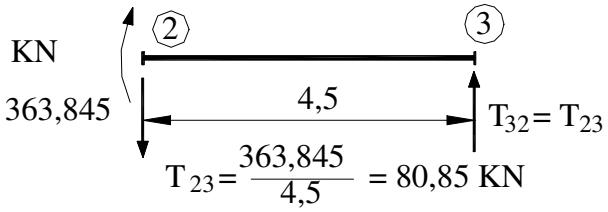


Fig. 6.9.g2

Bara 2-4

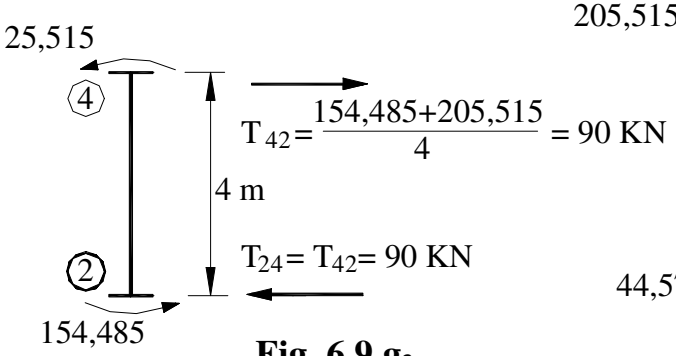


Fig. 6.9.g3

Bara 4-5

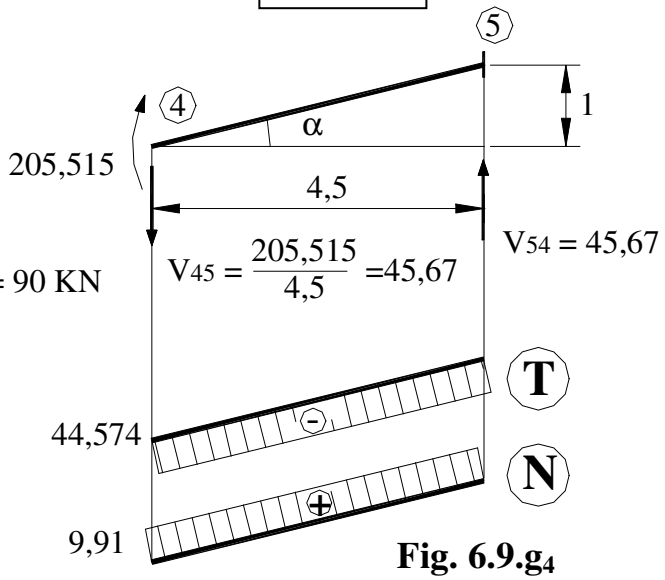


Fig. 6.9.g4

Fig. 6.9.g

$$\cos\alpha = \frac{4{,}5}{4{,}609} = 0{,}976 \qquad T_{45} = T_{54} = -V_{45} \cdot \cos\alpha = -45{,}67 \cdot 0{,}976 = -44{,}574KN$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{4{,}609} = 0{,}217 \qquad N_{45} = N_{54} = +V_{45} \cdot \sin\alpha = 45{,}67 \cdot 0{,}217 = 9{,}91KN$$

Fig. 6.9.e

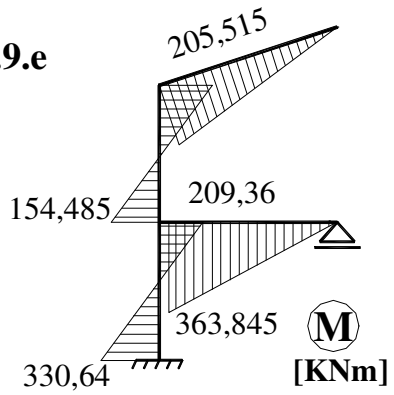


Fig. 6.9.f

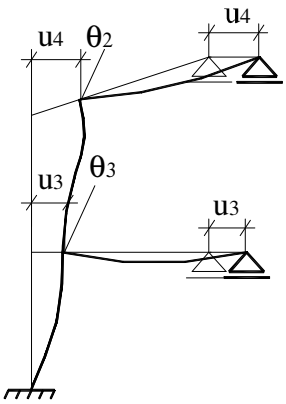


Fig. 6.9.g

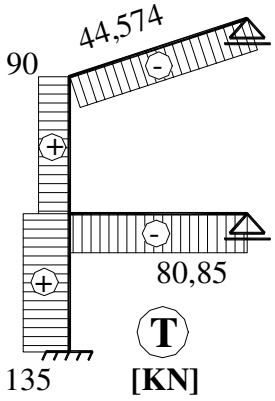
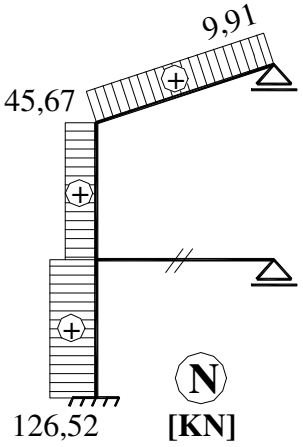
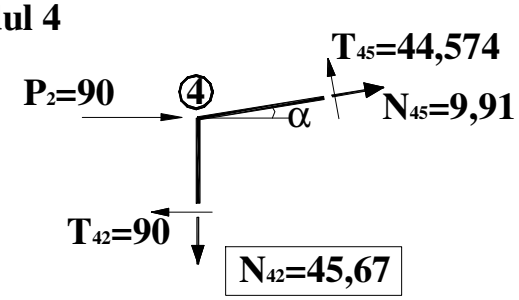


Fig. 6.9.h



Calculul forțelor axiale N (Fig.6.9.h)

Nodul 4

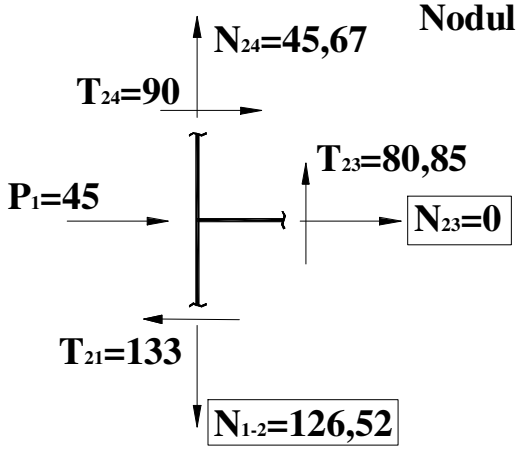


$$\sum Y_i = 0$$

$$-N_{42} + 44{,}574 \cdot \cos\alpha + 9{,}91 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$N_{42} = 45{,}67 KN$$

Nodul 2



$$\sum X_i = 0 \qquad N_{23} - 135 + 45 + 90 = 0$$

$$N_{23} = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \qquad -N_{12} + 45{,}67 + 80{,}85 = 0$$

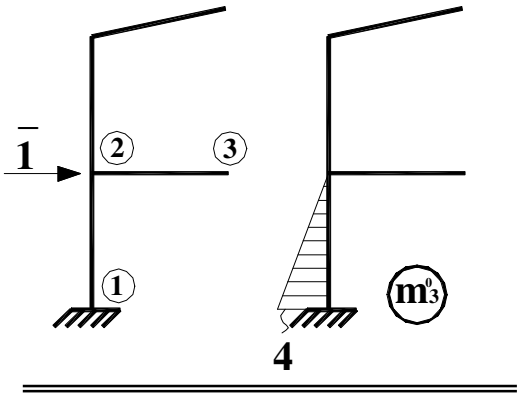
$$N_{12} = 156{,}52 KN$$

Determinarea poziției deformate (Fig.6.9.f)

Se vor calcula deplasările orizontale din secțiunile **3** şi **4.**

$$u_3 = \int m_3^0 M \frac{dx}{EI}$$

Situația virtuală pentru calculul deplasării u_3 (Fig.6.9.l$_1$)

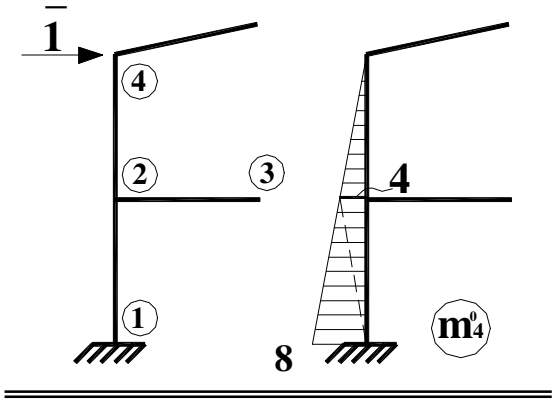


$$6EIu_3 = 2\cdot 4\cdot 330{,}64\cdot 4 - 4\cdot 209{,}36\cdot 4 = 7230{,}72$$

$$u_3 = 1205{,}12\cdot \frac{1}{EI}[m]$$

Fig. 6.9.l$_1$

Situația virtuală pentru calculul deplasarii u_4 (Fig.6.9.l$_2$)



$$6EIu_4 = 2\cdot 4\cdot 330{,}64\cdot 8 + 4\cdot 330{,}64\cdot 4 -$$
$$-2\cdot 4\cdot 209{,}36\cdot 4 - 4\cdot 209{,}36\cdot 8 + 2\cdot 4\cdot 154{,}485\cdot 4$$
$$-4\cdot 205{,}515\cdot 4 = 14707{,}44$$

$$u_4 = 2451{,}24\cdot \frac{1}{EI}[m]$$

Fig. 6.9.l$_2$

OBS: *Poziția deformată a cadrului respectă legăturile exterioare şi continuitatea materialului. Nodurile **2** şi **4** se translatează (**u_3** şi **u_4** calculate) şi se rotesc. Fibrele întinse ale barelor apar de partea diagramei de moment.*

APLICAȚIA 5

Se propune rezolvarea cadrului simetric din **fig.6.10** în două ipoteze de încărcare: încărcare simetrică şi încărcare antisimetrică. Utilizând metoda forțelor, se vor determina diagramele de eforturi **M**, **T** , **N** şi poziția deformată a cadrului.

Ipoteza a) *Structură simetrică încărcată simetric*

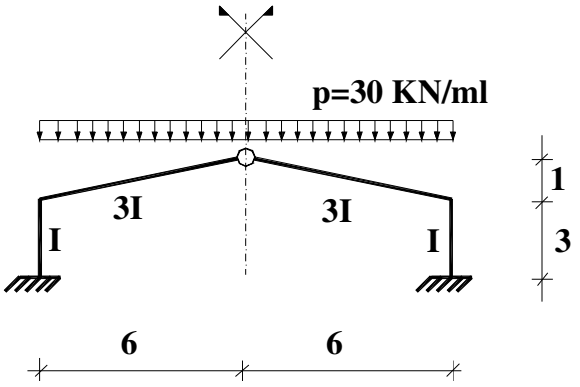


Fig. 6.10.a

Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$$n = N = l + r - 3c = 2 + 6 - 3 \cdot 2 = 2$$

STRUCTURA ESTE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINATĂ.

Structura dată este simetrică având:

- geometrie simitrică
- legături simetrice, inclusiv secțiunile
- simetrie de material

Axa de simetrie este o axă verticală care trece prin articulația centrală.

Alegerea sistemului de bază S.B. (Fig.6.10.a$_1$)

Se va alege un **S.B.** simetric, obținut prin eliminarea legăturilor corespunzătoare momentelor din cele două încastrări ale cadrului.

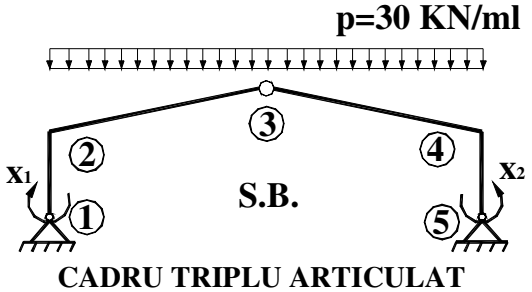


Fig. 6.10.a$_1$

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \theta_1 = 0 \\ \Delta_2 = \theta_5 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0\end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B.: M_F (Fig.6.10.a$_2$)

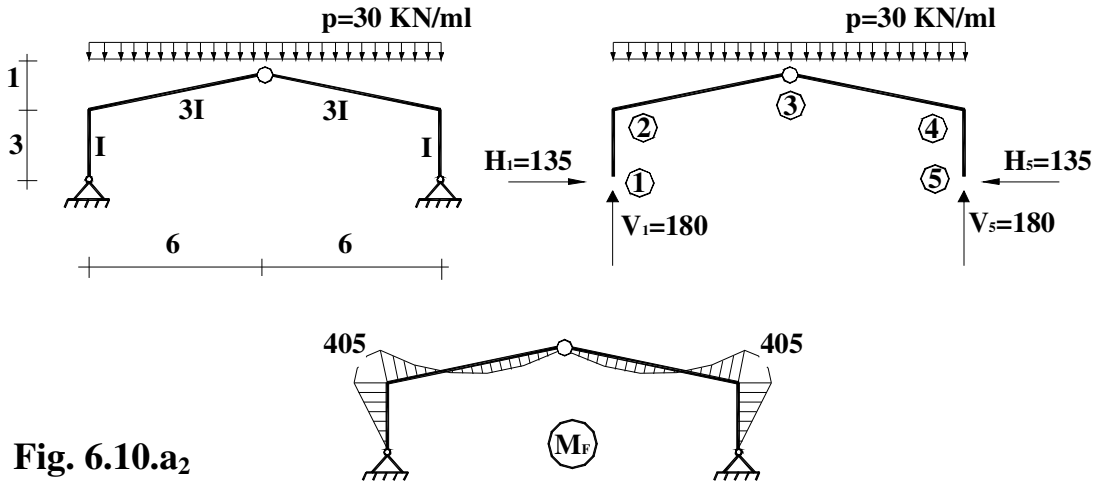


Fig. 6.10.a$_2$

Se observă că reacțiunile sunt simetrice ca şi încărcarea exterioară.

Acțiunea necunoscutei x_1=1 pe S.B.: m_1 (Fig.6.10.a$_3$)

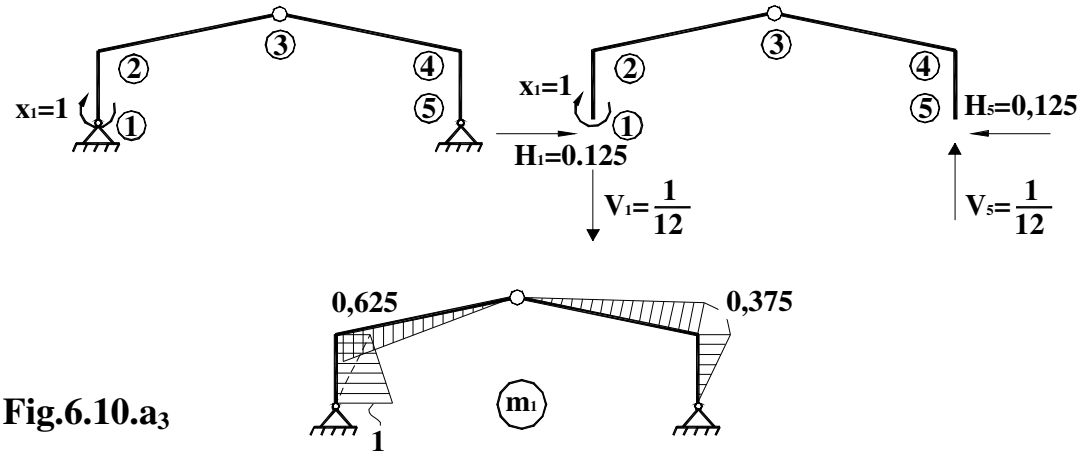


Fig.6.10.a$_3$

Acțiunea necunoscutei $x_2=1$ pe S.B.: m_2 (Fig.6.10.a$_4$)

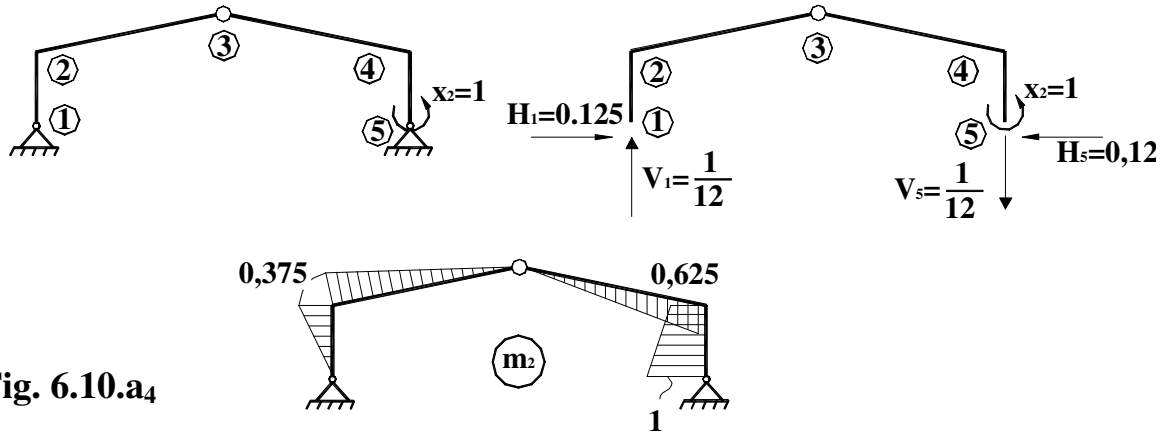


Fig. 6.10.a$_4$

Calculul lungimilor transformate şi al factorilor de încărcare m_{jk} (Fig.6.10.a$_5$)

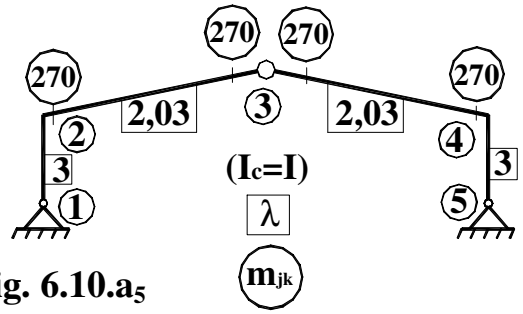


Fig. 6.10.a$_5$

$$\lambda_{12}=\lambda_{45}=3\cdot\frac{I}{I}=3$$

$$\lambda_{23}=\lambda_{34}=6{,}09\frac{I}{3I}=2{,}03$$

$$m_{23}=m_{32}=m_{34}=m_{43}=\frac{30\cdot 6^2}{4}=270$$

Calculul coeficienților necunoscutelor şi al termenilor liberi

$$6EI\delta_{11}=6EI\int m_1^2\frac{dx}{EI}=2\cdot 3\cdot 1\cdot 1+3\cdot 1\cdot 0{,}625+2\cdot 3\cdot 0{,}625\cdot 0{,}625+3\cdot 0{,}625\cdot 1+2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}625\cdot 0{,}625+$$
$$+2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}375\cdot 0{,}375+2\cdot 3\cdot 0{,}375\cdot 0{,}375=15{,}094$$

$6EI\delta_{22}=6EI\int m_2^2\frac{dx}{EI}=6EI\delta_{11}=15{,}094\Rightarrow$ diagramele $\mathbf{m_1}$ şi $\mathbf{m_2}$ fiind inversate

$$6EI\delta_{12}=6EI\delta_{21}=6EI\int m_1m_2\frac{dx}{EI}=-3\cdot 1\cdot 0{,}375-2\cdot 3\cdot 0{,}375\cdot 0{,}625-2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}625\cdot 0{,}375-$$
$$-2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}375\cdot 0{,}625-2\cdot 3\cdot 0{,}375\cdot 0{,}625-3\cdot 0{,}375\cdot 1=-6{,}965$$

$$6EI\Delta_{1F}=6EI\int m_1M_F\frac{dx}{EI}=-3\cdot 1\cdot 405-2\cdot 3\cdot 0{,}625\cdot 405-2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}625\cdot 405+2{,}03\cdot 270\cdot 0{,}625+$$
$$+2\cdot 2{,}03\cdot 0{,}375\cdot 405-2{,}03\cdot 270\cdot 0{,}375+2\cdot 3\cdot 405\cdot 0{,}375=-2096{,}55$$

$6EI\Delta_{2F} = 6EI\int m_2 M_F \frac{dx}{EI} = 6EI\Delta_{2F} \Rightarrow$ diagramele **m_1** şi **m_2** sunt inversate, iar diagrama **M_F** este simetrică.

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} 15{,}094X_1 - 6{,}965X_2 - 2096{,}55 = 0 \\ -6{,}965X_1 + 15{,}094X_2 - 2096{,}55 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 257{,}866 = M_1 \\ X_2 = +X_1 = 257{,}866 = M_2 \end{cases}$$

Calculul diagramei M (Fig.6.10.a$_6$)

$$M = M_F + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = M_F + m_1 \cdot 257{,}866 + m_2 \cdot 257{,}866$$

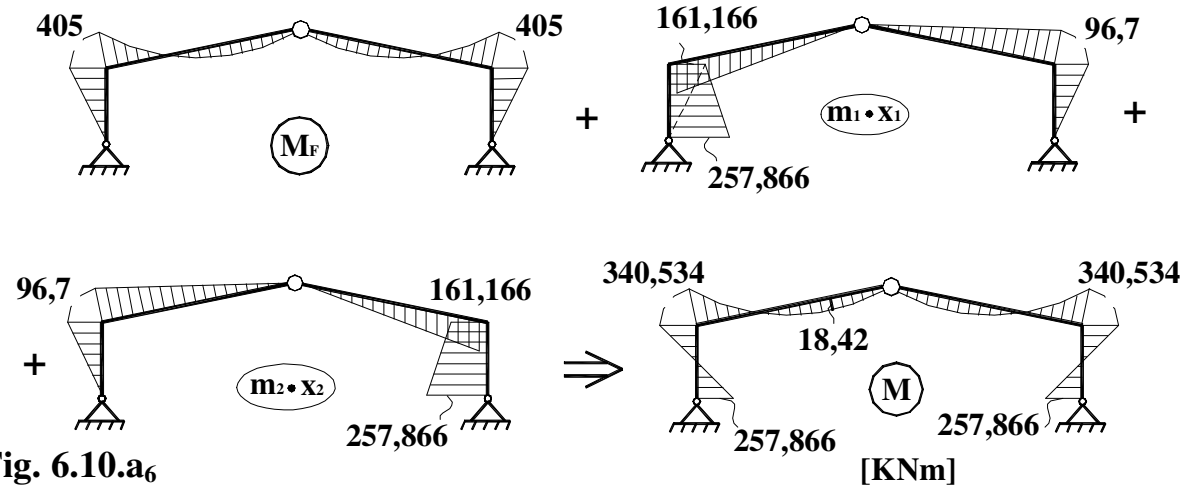
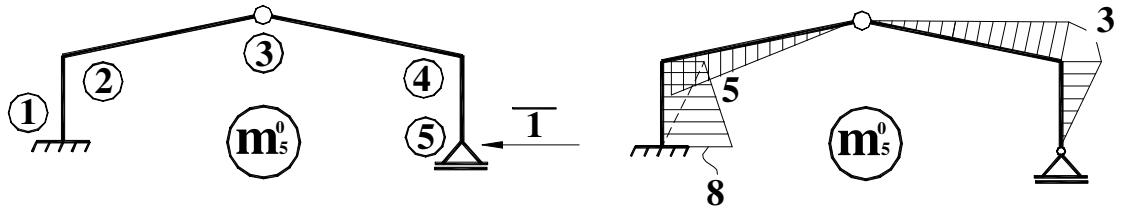


Fig. 6.10.a$_6$

Verificarea diagramei M (Fig.6.10.a$_7$)

Situația virtuală de încărcare pentru calculul deplasării u_5



Conform formulei Maxwell – Mohr:

$u_5 = \int m_5^0 M \frac{dx}{EI} = 0$ in structura reală

$$6EIu_5 = 2\cdot 3\cdot 8\cdot 257{,}866 - 3\cdot 8\cdot 340{,}534 + 3\cdot 5\cdot 257{,}866 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot 340{,}534 - 2\cdot 2{,}03\cdot 340{,}534\cdot 5 +$$
$$+ 2{,}03\cdot 270\cdot 5 + 2\cdot 2{,}03\cdot 3\cdot 340{,}534 - 2{,}03\cdot 270\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3\cdot 340{,}534 - 3\cdot 3\cdot 257{,}866 =$$
$$= 29263{,}374 - 29266{,}77 = -3{,}396 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0{,}011\% < 1\%$$

Calculul diagramei T (Fig.6.10.a$_6$)

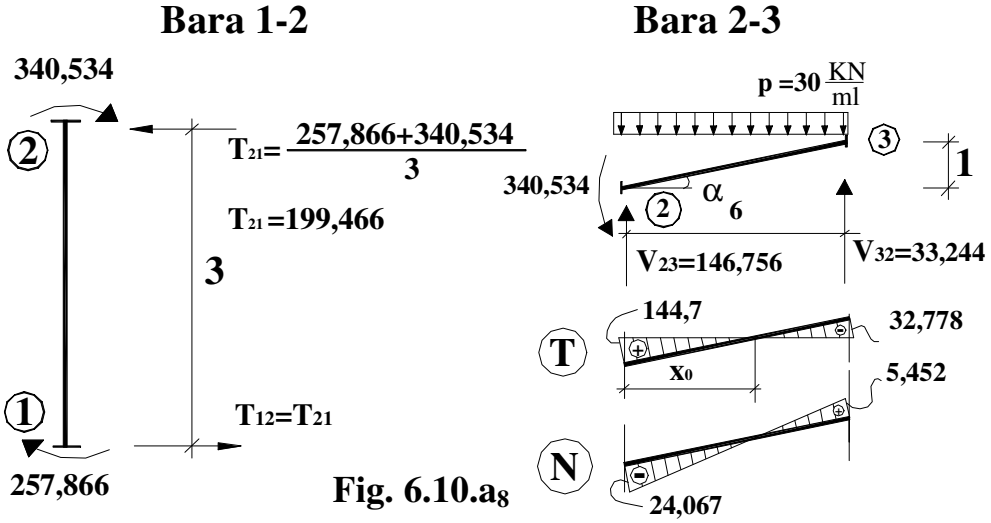


Fig. 6.10.a$_8$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow V_{23}\cdot 6 - 340{,}534 - 30\cdot 6\cdot 3 = 0$$
$$V_{23} = \frac{880{,}534}{6} = 146{,}756\,KN$$
$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_{32}\cdot 6 + 30\cdot 6\cdot 3 - 340{,}534 = 0$$
$$V_{32} = \frac{199{,}466}{6} = 33{,}244\,KN$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{6{,}082} = 0{,}164 \quad \cos\alpha = \frac{6}{6{,}082} = 0{,}986$$
$$T_{23} = V_{23}\cdot\cos\alpha = 146{,}756\cdot 0{,}986 = 144{,}70\,KN$$
$$T_{32} = -V_{32}\cdot\cos\alpha = -33{,}244\cdot 0{,}986 = -32{,}778\,KN$$
$$T_{x_0} = 146{,}756\cos\alpha - 30\cdot x_0\cdot\cos\alpha = 0 \Rightarrow x_0 = 4{,}892m$$

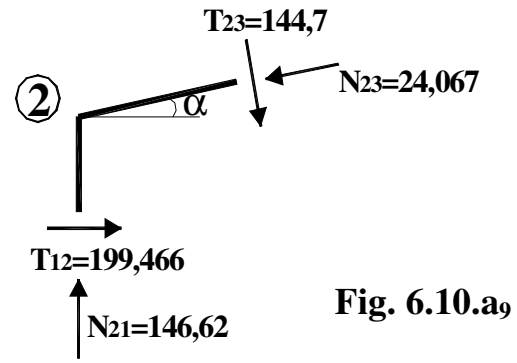
$$M_{\max} = 146{,}756\cdot 4{,}892 - 340{,}534 - 30\cdot\frac{4{,}892^2}{2} = 18{,}42\,KNm$$

Calculul diagramei N (Fig.6.10.a$_9$)

Se folosesc reacțiunile calculate la bara **2-3.**

$$N_{23} = -V_{23} \cdot \sin\alpha = -146{,}756 \cdot 0{,}164 = -24{,}067\,KN$$
$$N_{32} = +V_{32} \cdot \sin\alpha = 33{,}244 \cdot 0{,}164 = 5{,}452\,KN$$

Nodul 2 respectiv **Nodul 4**

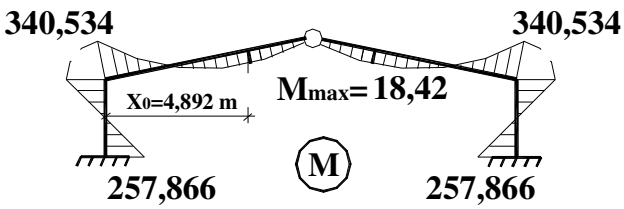


$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow N_{21} - 144{,}7 \cdot 0{,}986 - 24{,}067 \cdot 0{,}164 = 0 \Rightarrow$$

N_{21}=146,62 KN

Fig. 6.10.a$_9$

Fig. 6.10.a$_6$



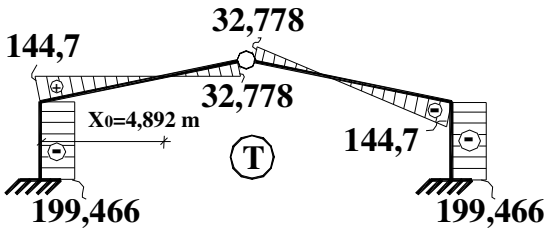
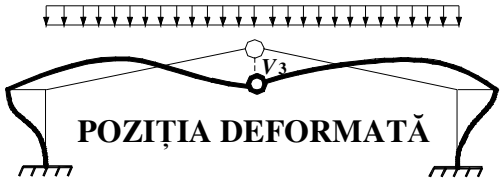


Fig. 6.10.a$_8$

Fig. 6.10.a$_{10}$



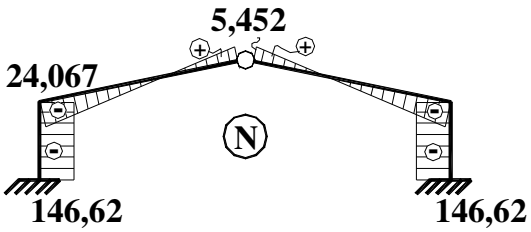
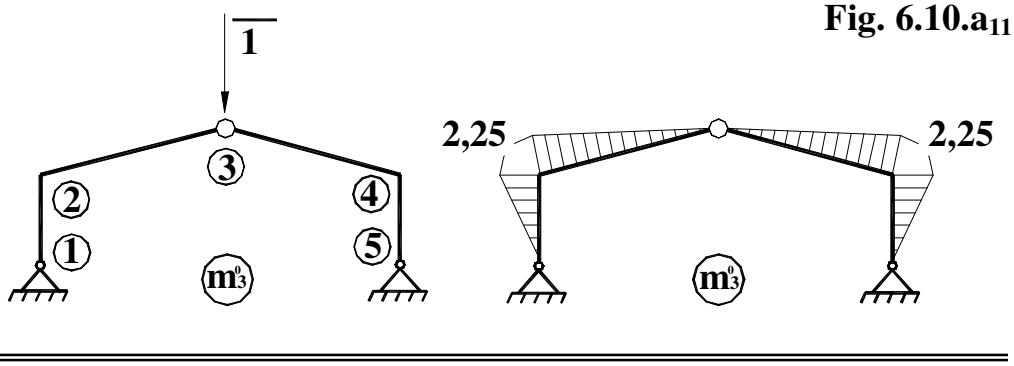


Fig. 6.10.a$_9$

Trasarea poziției deformate (**Fig.6.10.a$_{10}$**)

Vom calcula deplasarea verticală din secțiunea **3** . Situația virtuală pentru deplasarea verticală $\mathbf{v_3}$ se construieşte pe structura static determinată din **Fig.6.10.a$_{11}$**.

Fig. 6.10.a$_{11}$



Conform formulei Maxwell-Mohr:

$$v_3 = \int m_3^0 M \frac{dx}{EI}$$

Deoarece diagramele $\mathbf{m_3^0}$ şi **M** sunt simetrice calculul se face pe jumatate de structură şi rezultatul se înmulţeşte cu **2**.

$$6EIv_3 = 2(-3 \cdot 2{,}25 \cdot 257{,}866 + 2 \cdot 3 \cdot 2{,}25 \cdot 340{,}534 + 2 \cdot 2{,}03 \cdot 2{,}25 \cdot 340{,}534 - 2{,}03 \cdot 270 \cdot 2{,}25) = 9468{,}333$$

$$v_3 = \frac{9468{,}333}{6} = 1578{,}055 \cdot \frac{1}{EI}$$

Se observă că diagramele de eforturi **M** şi **N** sunt simetrice, iar diagrama **T** este antisimetrică. Poziţia deformată a rezultat şi ea simetrică. În concluzie, la o structură simetrică încărcată simetric se obţine:

diagrama **M** $\rightarrow$ simetrică

diagrama **N** $\rightarrow$ simetrică

diagrama **T** $\rightarrow$ antisimetrică

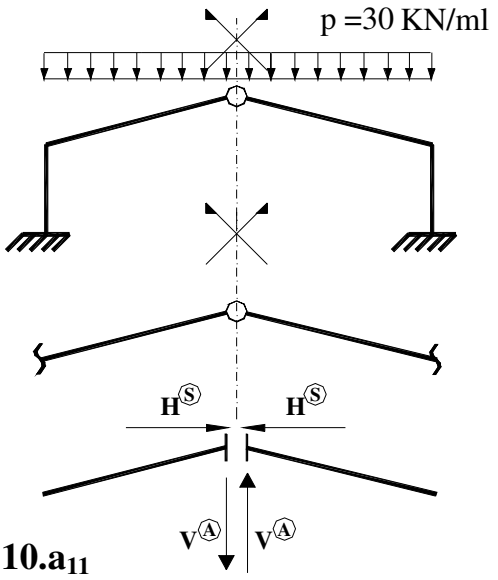
Ţinând cont de aceste observaţii, calculele se pot face pe jumătate de structură, construită după cum urmează (Fig. 6.10.a$_{11}$, a$_{12}$):

Axa de simetrie secţioneaza articulaţia centrală în care apar două forţe de legătură interioare: **H** şi **V**. Se observă că forţa H este simetrică, iar forţa V antisimetrică.

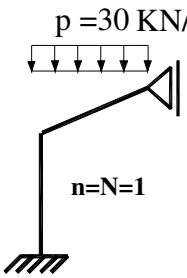
Jumătatea de structură, numită semistructură simetrică va avea legături în care apar forţele de legătură simetrice.

Jumătatea de structură, numită semistructură antisimetrică va conţine forţele de legătură antisimetrice.

OBS. *Utilizând semistructurile la rezolvare volumul de calcul se reduce substanţial.*



Semistructură simetrică



Semistructură antisimetrică

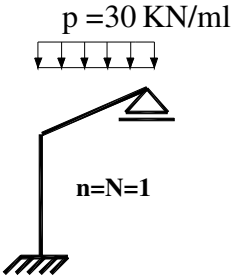
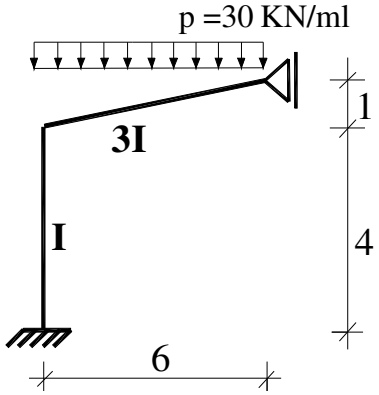


Fig. 6.10.a$_{11}$

Fig. 6.10.a$_{13}$



Rezolvând semistructura simetrică încărcată cu forța exterioară (acțiune simetrică) se obțin diagramele de eforturi M,T şi N.

Diagramele **M** şi **N** se transpun simetric pe întreaga structură.

Diagrama **T** se transpune antisimetric pe întreaga structură.

Ipoteza b) *Structură simetrică cu încărcare antisimetrică*

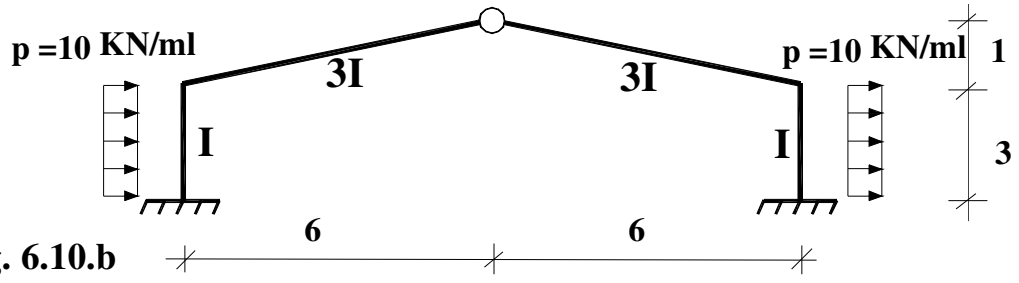


Fig. 6.10.b

Stabilirea gradului de nederminare statică:

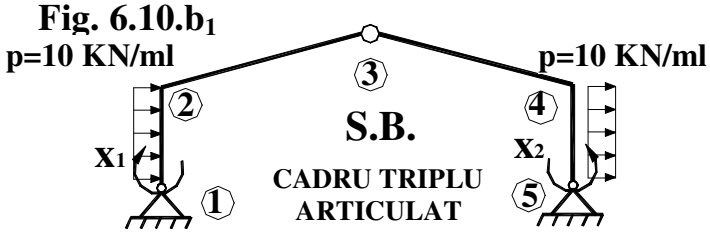
$$n = N = l + r - 3c = 2 + 6 - 3 \cdot 2 = 2$$

STRUCTURA ESTE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINATĂ.

Alegerea sistemului de bază (Fig.6.10.b$_1$)

Se va folosi sistemul de bază utilizat în ipoteza anterioară de încărcare a structurii.

Fig. 6.10.b$_1$



Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases}\Delta_1=\theta_1=0\\ \Delta_2=\theta_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_1=\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\Delta_{1F}=0\\ \Delta_2=\delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\Delta_{2F}=0\end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază (Fig.6.10.b$_2$)

Având în vedere că sistemul de bază ales a fost rezolvat în cazul anterior de încărcare (încărcare simetrică), în această situație trebuie să se calculeze numai termenii liberi din ecuațiile de condiție, ceilalți fiind cunoscuți. Astfel se ştie că:

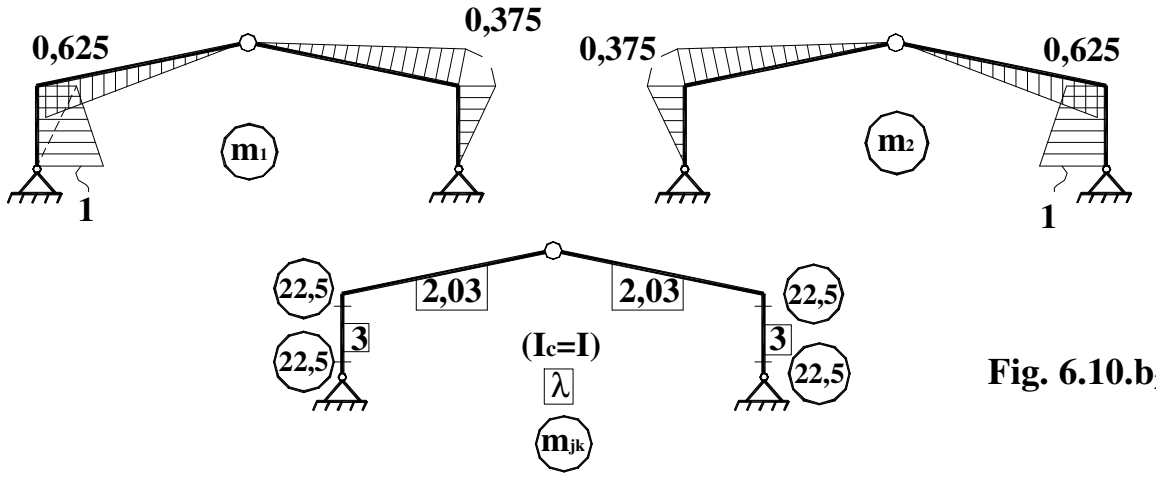


Fig. 6.10.b$_2$

$$6EI\delta_{11}=15{,}094;\qquad 6EI\delta_{12}=6EI\delta_{21}=-6{,}965;\qquad 6EI\delta_{22}=15{,}094$$

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B.: M_F (Fig.6.10.b$_3$)

$$(\sum M)_5=0\Rightarrow -V_1\cdot 12+10\cdot 3\cdot 1{,}5+10\cdot 3\cdot 1{,}5=0\Rightarrow V_1=\frac{90}{12}=7{,}5KN$$

$$(\sum M)_1=0\Rightarrow -V_5\cdot 12+10\cdot 3\cdot 1{,}5+10\cdot 3\cdot 1{,}5=0\Rightarrow V_5=7{,}5KN$$

$$(\sum M)_3^{ST}=0\Rightarrow H_1\cdot 4-7{,}5\cdot 6-10\cdot 3\cdot 2{,}5=0\Rightarrow H_1=\frac{120}{4}=30KN$$

$$(\sum M)_3^{DR}=0\Rightarrow H_5\cdot 4-7{,}5\cdot 6-10\cdot 3\cdot 2{,}5=0\Rightarrow H_5=H_1=30KN$$

Se observă că reacțiunile sunt antisimetrice, ca şi încărcarea exterioară.

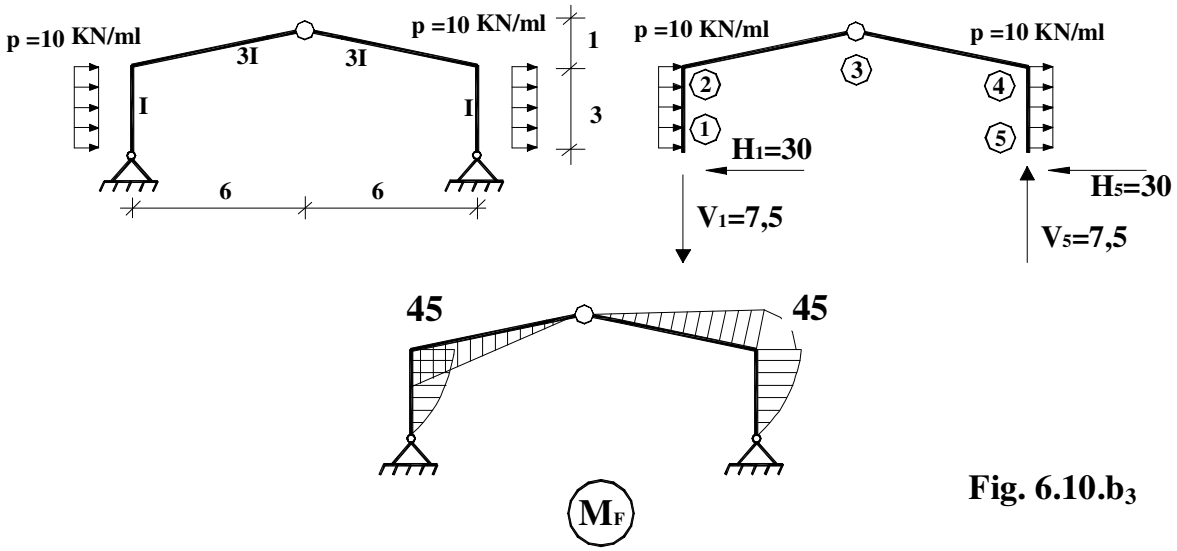


Fig. 6.10.b$_3$

Calculul termenilor liberi din sistemul ecuațiilor de condiție:

$6EI\Delta_{1F} = -6EI\Delta_{2F} = 6EI\int m_1 \cdot M_F \frac{dx}{EI} \rightarrow$ deoarece diagramele $\mathbf{m_1}$ şi $\mathbf{m_2}$ sunt inverse, iar diagrama $\mathbf{M_F}$ antisimetrică

$$6EI\Delta_{1F} = 6EI\Delta_{2F} = 3\cdot 45\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 45\cdot 0{,}625 + 2\cdot 2{,}03\cdot 45\cdot 0{,}625 + 3\cdot 22{,}5\cdot 1 + 3\cdot 22{,}5\cdot 0{,}625 + \\ + 2\cdot 2{,}03\cdot 45\cdot 0{,}375 + 2\cdot 3\cdot 45\cdot 0{,}375 + 3\cdot 22{,}5\cdot 0{,}375 = 722{,}7$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție:

$$\begin{cases} 15{,}094X_1 - 6{,}965X_2 + 722{,}7 = 0 \\ -6{,}965X_1 + 15{,}094X_2 - 722{,}7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -32{,}762 = M_1 \\ X_2 = +32{,}762 = M_2 \end{cases}$$

Calculul diagramei M (Fig.6.10.b$_4$)

$$M = M_F + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = M_F + m_1 \cdot (-32{,}762) + m_2 \cdot 32{,}762$$

Se observă că diagrama **M** este antisimetrică, ca şi încărcarea exterioară.

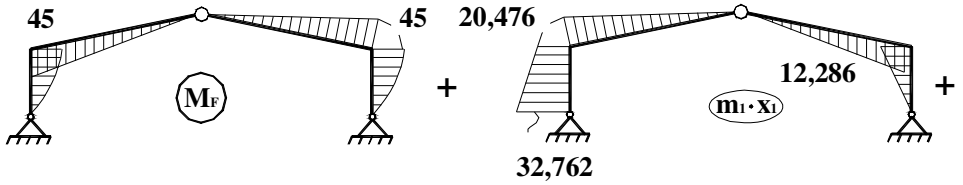
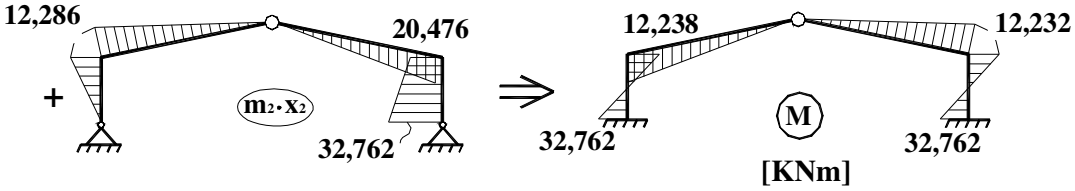


Fig. 6.10.b$_4$



Calculul forțelor tăietoare T (Fig.6.10.b$_5$)

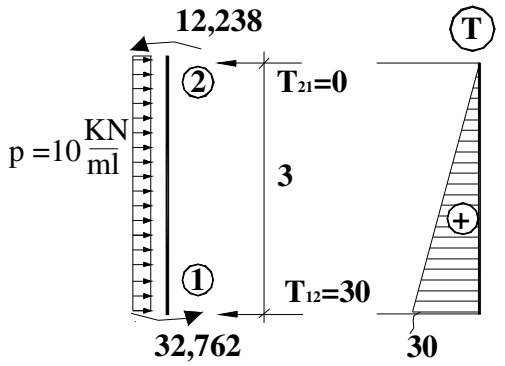
Bara 1-2

$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow T_{12} \cdot 3 - 32{,}762 - 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 12{,}238 = 0$

T_{12}=30*KN*

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -T_{21} \cdot 3 - 12{,}238 - 32{,}762 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$

T_{21}=0



Bara 2-3

$V_{23} = -V_{32} \Rightarrow (\sum M)_3 = 0 \Rightarrow -V_{23} - 6 + 12{,}238 = 0$

V_{23}=2,039*KN*

$\cos\alpha = 0{,}986$

$\sin\alpha = 0{,}164$

$T_{23} = T_{32} = -V_2 \cdot \cos\alpha - 2{,}039 \cdot 0{,}986 = -2{,}011 KN$

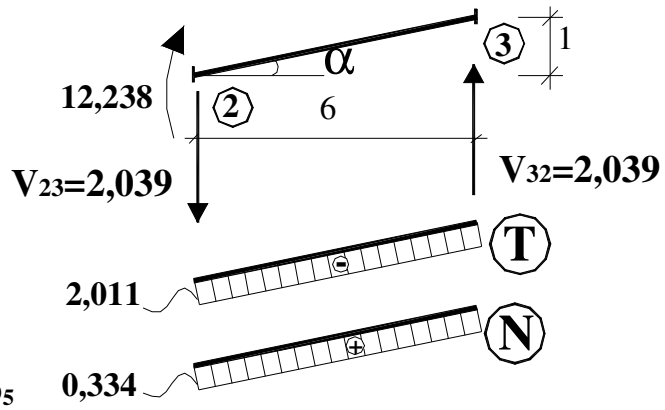


Fig. 6.10.b$_5$

Calculul fortei axiale N (Fig.6.10.b$_6$)

$N_{23} = N_{32} = +V_{23} \cdot \sin\alpha = 0{,}334 KN$

Nodul 2

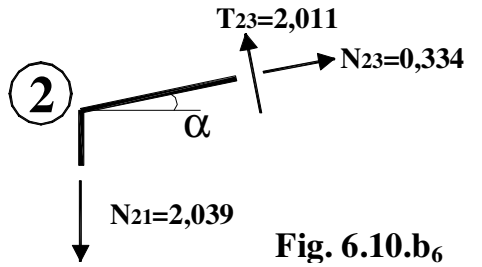
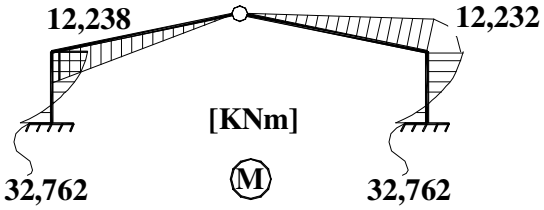


Fig. 6.10.b$_6$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -N_{21} + 2{,}011 \cdot \cos\alpha + 0{,}334 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$N_{21} = 2{,}039\ KN$$

Fig. 6.10.b$_4$



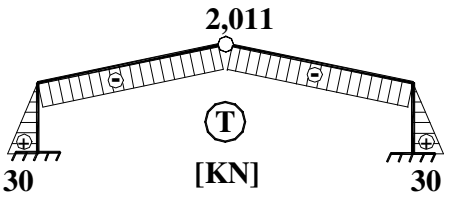
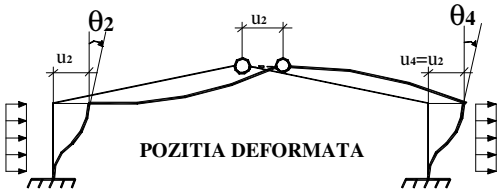


Fig. 6.10.b$_5$

Fig. 6.10.b$_7$



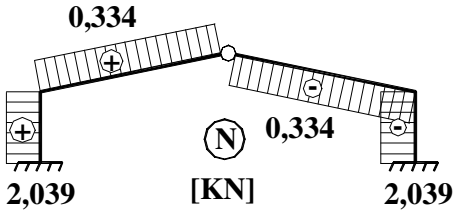


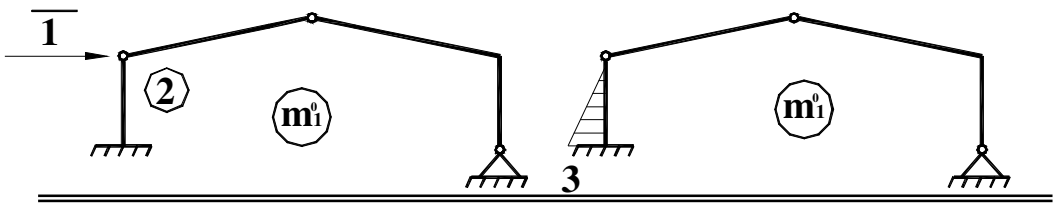
Fig. 6.10.b$_6$

Calculul poziției deformate (Fig.6.10.b$_7$)

Vom calcula deplasarea orizontala a nodului **2** identică cu deplasarea nodului **4.** Situația virtuală de încărcare cerută de formula M-M o vom construi pe structura static determinată de mai jos.

Situația virtuală de încărcare pentru deplasarea u$_2$ (Fig.6.10.b$_8$)

Fig. 6.10.b$_8$



$$u_2 = \int m_1^0 M \frac{dx}{EI}$$

$$6EIu_2 = 2\cdot 3\cdot 32{,}762\cdot 3 - 3\cdot 12{,}232\cdot 3 - 3\cdot 22{,}5\cdot 3 = 277{,}238$$

$$u_2 = 46{,}188\cdot \frac{1}{EI}[m]$$

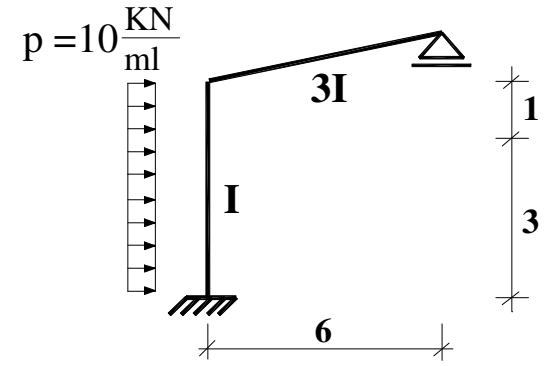
Se observă că diagramele de eforturi au următoarele caracteristici:

- diagrama **M** şi **N** sunt antisimetrice
- diagrama **T** este simetrică

De asemenea poziția deformată este antisimetrică.

Rezultă că structura simetrică încărcată antisimetric poate fi rezolvată pe semistructura antisimetrică (discutată la cazul anterior de încărcare), reducând în acest fel foarte mult volumul de calcul.

Semistructura antisimetrică (**Fig.6.10.b$_9$**)



$$n = N = l + r - 3c = 0 + 4 - 3\cdot 1 = 1$$

STRUCTURĂ O DATĂ STATIC NEDETERMINATĂ

Fig. 6.10.b$_9$

Diagramele de eforturi **M** şi **N** obținute se transpun antisimetric pe întreaga structură, iar diagrama **T** se transpune simetric pe întreaga structură.

HALE INDUSTRIALE PARTER

APLICAȚIA 1

Se propune schema pentru calculul static al cadrului transversal de hală parter din **fig.6.11**. Se cere determinarea diagramelor **N**,**T**,**M** şi verificarea lor.

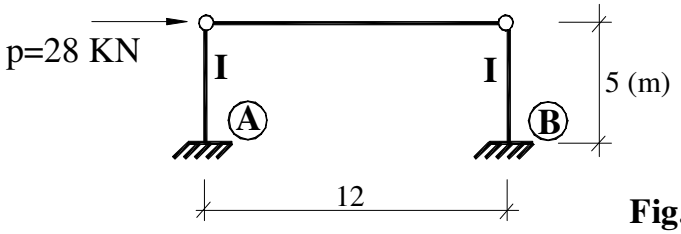


Fig. 6.11

Pentru stabilirea gradului de nedeterminare statică se va utiliza formula:

$$n = N = l + r - 3c = 2 \cdot 2 + 6 - 3 \cdot 3 = 1$$

STRUCTURA ESTE O DATĂ STATIC NEDERMINATĂ.

Ca sistem de bază se va folosi structura obținută prin eliminarea barei orizontale dublu articulată şi neîncărcată cu forțe exterioare. În această bară apare numai un efort axial, care va fi forța necunoscută a problemei (**Fig.6.11.a**)

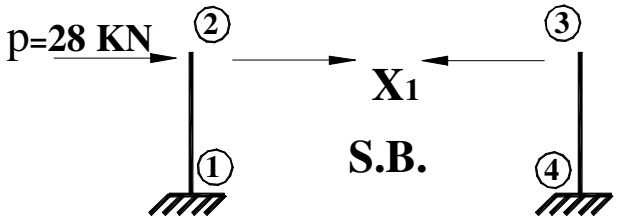


Fig. 6.11.a

Ecuația de condiție se obține impunând sistemului de bază condiția ca variația de distanță Δl_{23} , pe direcția necunoscutei x_1 să fie zero ca şi în structura reală (bara orizontală **2-3**, împiedică variația de distanță între capetele stâlpilor).

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta l_{23} = 0 \\ \Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0 \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază.

Acțiunea forțelor exterioare (Fig 6.11.b) şi a necunoscutei $X_1=1$ (Fig.6.11.c)

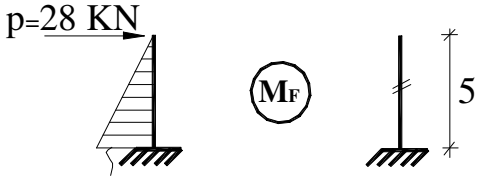


Fig. 6.11.b

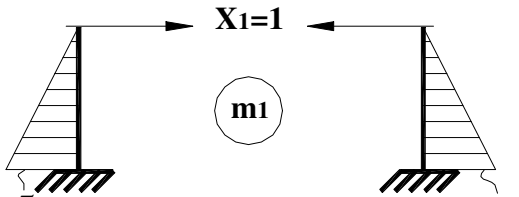
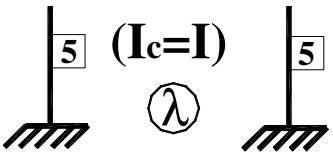


Fig. 6.11.c

Fig. 6.11.d



şi al Calculul coeficientului necunoscutei termenului liber:

Determinarea necunoscutei $X_1=N_{2-4}$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 \frac{dx}{EI}$$

$$6EI\delta_{11} = 2 \cdot [2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5] = 500$$

$$\Delta_{1F} = \int m_1 M_F \frac{dx}{EI}$$

$$6EI\Delta_{1F} = 2 \cdot 5 \cdot 140 \cdot 5 = 7000$$

$$500X_1 + 7000 = 0 \Rightarrow X_1 = N_{23} = -14KN$$

Calculul, trasarea şi verificarea diagramei M (Fig.6.11.e)

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1(-14)$$

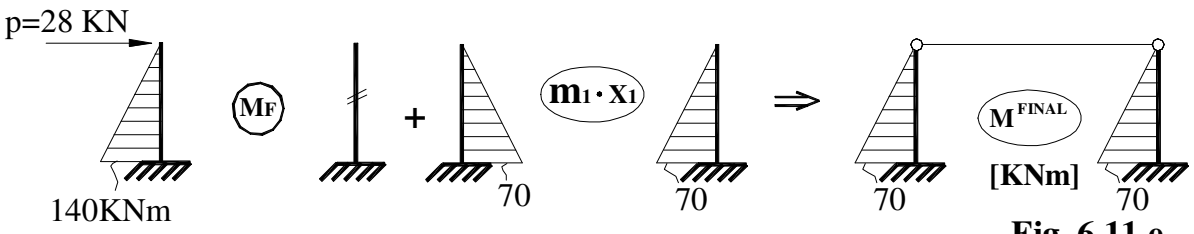


Fig. 6.11.e

În bara orizontală **2-3** apare forța de compresiune:

$$N_{2\text{-}3} = -14\ KN$$

Pentru **verificarea diagramei M** se va apela la situația virtuală din **fig.6.11.f** cu ajutorul căreia se va calcula rotirea $\theta_1=0$ cunoscută din situația reală. Situația virtuală pentru calculul rotirii θ_1 a fost construită pe o structură static determinată, obținută din structura reală:

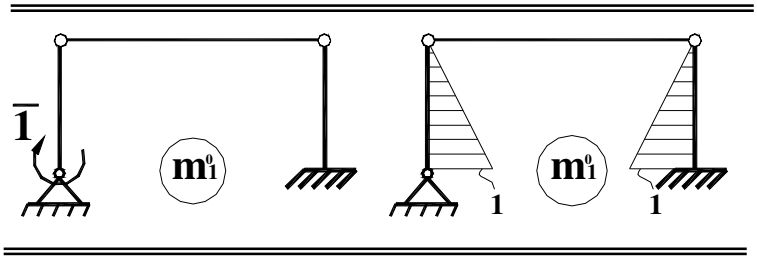


Fig. 6.11.f

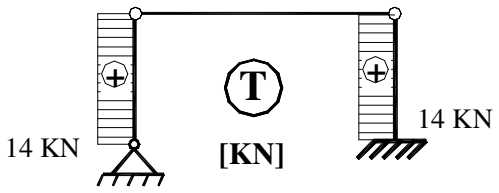
$$\theta_1 = \int m_1^0 M^{FINAL} \frac{dx}{EI} = 0$$

$$6EI\theta_1 = -2 \cdot 5 \cdot 70 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 70 \cdot 1 = 0$$

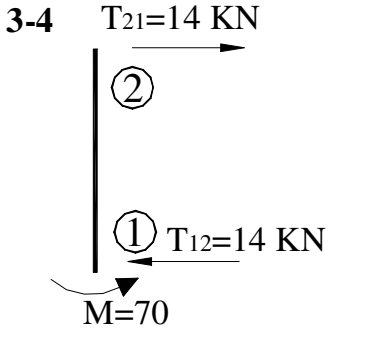
Calculul diagramei T (Fig.6.11.g)

Se va utiliza ecuațiile de echilibru pentru fiecare bară, momentele încovoietoare fiind cunoscute.

Fig. 6.11.g



Bara 1-2 respectiv **3-4**



Calculul diagramei N (Fig.6.11.h)

Vom utiliza ecuatiile de echilibru pentru fiecare nod al structurii.

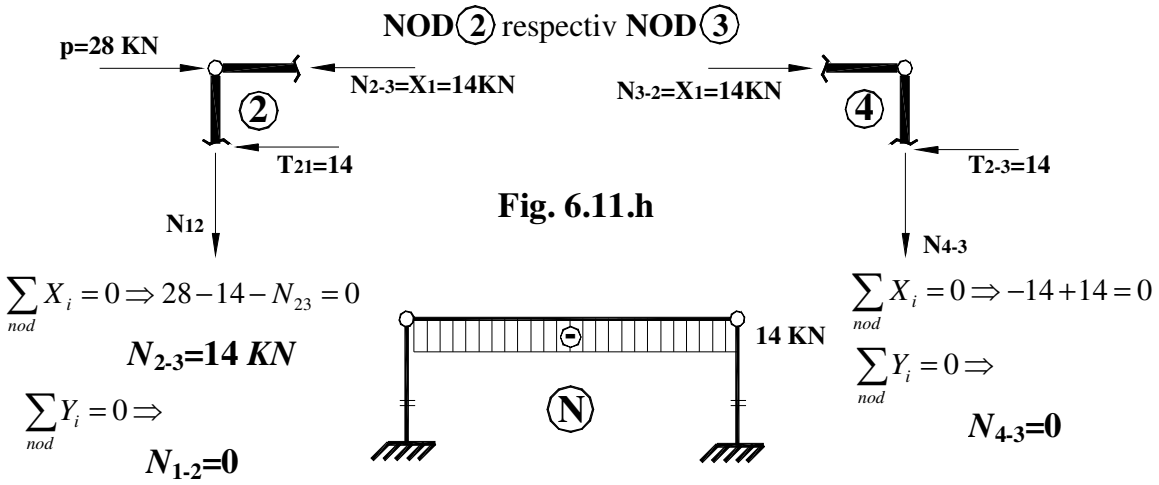


Fig. 6.11.h

$\sum_{nod} X_i = 0 \Rightarrow 28 - 14 - N_{23} = 0$

$N_{2\text{-}3}$**=14** ***KN***

$\sum_{nod} Y_i = 0 \Rightarrow$

$N_{1\text{-}2}$**=0**

$\sum_{nod} X_i = 0 \Rightarrow -14 + 14 = 0$

$\sum_{nod} Y_i = 0 \Rightarrow$

$N_{4\text{-}3}$**=0**

APLICAȚIA 2

Se propune schema pentru calculul static al cadrului transversal de hală parter din **fig.6.12**.Se cere determinarea diagramelor **M**, **T**, **N** şi verificarea lor.

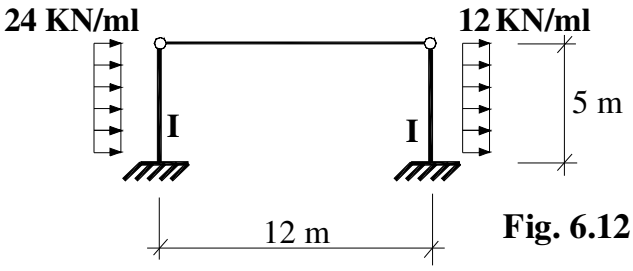


Fig. 6.12

Stabilirea gradului de nedeterminare statică:

$n = N = l + r - 3c = 2 \cdot 2 + 6 - 3 \cdot 3 = 1$

STRUCTURA ARE O NEDETERMINARE STATICĂ.

Sistemul de bază optim se obține alegând ca necunoscută forța axială din bara orizontală, dublu articulată şi neîncărcată cu forțe exterioare.

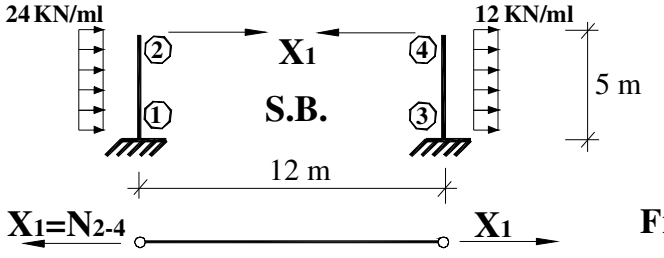


Fig. 6.12.a

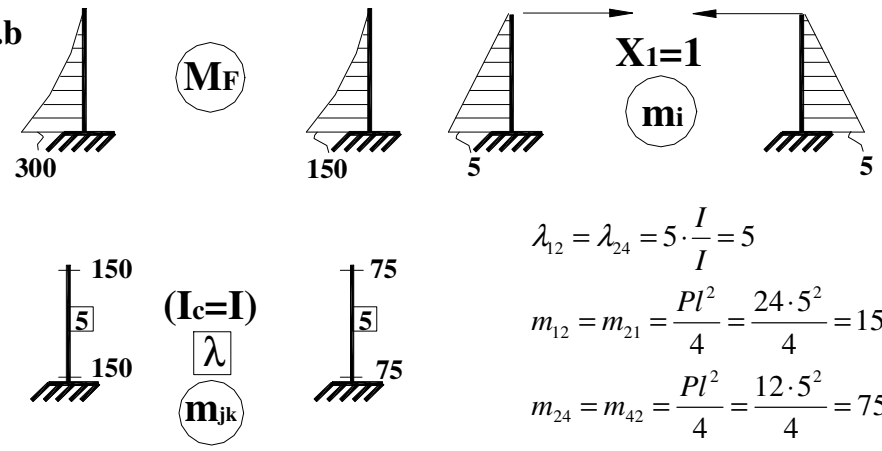
Ecuația de condiție exprimă compatibilitatea deformatei sistemului de bază cu legaturile structurii reale:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = \Delta l_{24} = 0 \\ \Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0 \end{cases} \quad \text{sau}$$

Rezolvarea sistemului de bază:

Acțiunea forțelor exterioare şi ale necunoscutei X_1=1.
Calculul lungimilor transformate λ şi al caracteristicilor de încărcare m_{jk} (Fig.6.12.b)

Fig. 6.12.b



$$\lambda_{12} = \lambda_{24} = 5 \cdot \frac{I}{I} = 5$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{Pl^2}{4} = \frac{24 \cdot 5^2}{4} = 150.$$

$$m_{24} = m_{42} = \frac{Pl^2}{4} = \frac{12 \cdot 5^2}{4} = 75$$

Calculul coeficientului necunoscutei şi al termenului liber.

Determinarea necunoscutei $X_1 = N_{2\text{-}4}$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\delta_{11} = 2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 500$$

$$\Delta_{1F} = \int m_1 \cdot M_F \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\Delta_{1F} = 2 \cdot 5 \cdot 300 \cdot 5 - 5 \cdot 150 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 150 \cdot 5 + 5 \cdot 75 \cdot 5 = 5625$$

Obținem din ecuația de condiție:

$$500X_1 + 5625 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{X_1 = N_{2\text{-}4} = -11{,}25\ KN}$$

Calculul, trasarea şi verificarea diagramei M (Fig.6.12.c)

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot (-11{,}25)$$

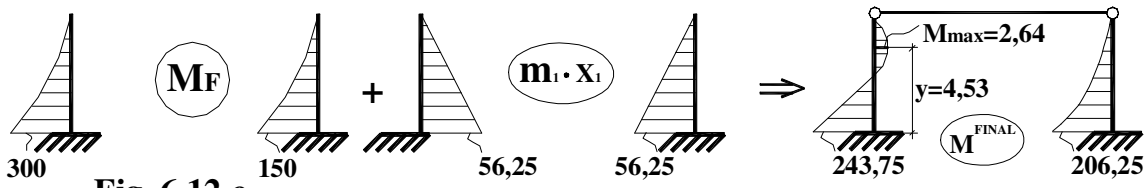


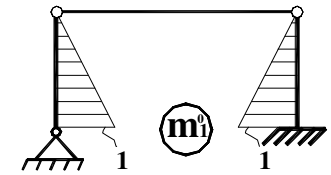
Fig. 6.12.c

Pentru **verificarea diagramei M^{FINAL}** se va utiliza rotirea **$\theta_1=0$** cunoscută din situația reală:

$$\theta_1 = \int m_1^0 M^{FINAL} \frac{dx}{EI} = 0$$

Se va folosi formula Maxwell-Mohr pentru structurile static nedeterminate.

Situația virtuală de încărcare este cunoscută din aplicația precedentă (**Fig.6.11.f**)



$$6EI\theta_1 = -2\cdot 5\cdot 243{,}75 + 5\cdot 150\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 206{,}25\cdot 1 -$$
$$-5\cdot 75\cdot 1 = -2812{,}5 + 2812{,}5 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0\%$$

Calculul şi trasarea diagramei T. Calculul momentelor maxime (Fig.6.12.d.e)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru pentru fiecare stâlp, momentele încovoietoare fiind cunoscute.

Stâlpul 1-2

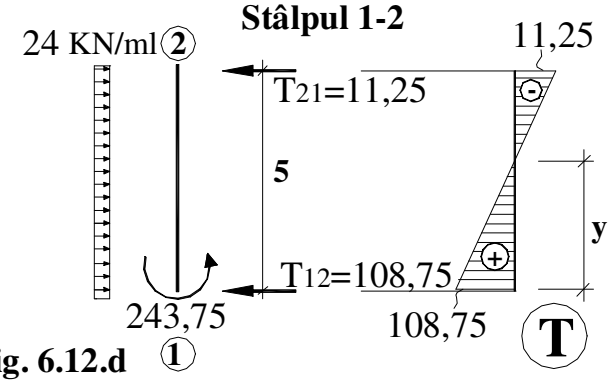


Fig. 6.12.d

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow T_{12}\cdot 5 - 243{,}75 - 24\cdot 5\cdot 2{,}5 = 0$$

$$\boldsymbol{T_{1\text{-}2}=108{,}75\ KN}$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -T_{21}\cdot 5 + 24\cdot 5\cdot 2{,}5 - 243{,}75 = 0$$

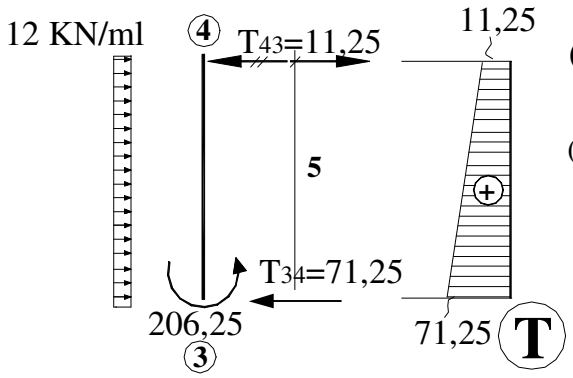
$$\boldsymbol{T_{2\text{-}1}=11{,}25\ KN}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow 108{,}75 - 24\cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = 4{,}53m}$$

$$M_{\max} = 108{,}75\cdot 4{,}53 - 243{,}75 - 24\cdot 4{,}53\cdot \frac{4{,}53}{2} = 2{,}64 KNm$$

Stâlpul 3-4



$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow T_{34}\cdot 5 - 206{,}25 - 12\cdot 5\cdot 2{,}5 = 0$$

$$\boldsymbol{T_{34}= 71{,}25\ KN}$$

$$(\sum M_3) = 0 \Rightarrow -T_{43} + 12\cdot 5\cdot 2{,}5 - 206{,}25 = 0$$

$$\boldsymbol{T_{43} = -11{,}25\ KN}$$

Fig. 6.12.e

Calculul şi trasarea diagramei N (Fig.6.12.f)

Se utilizează ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod din structură, forțele tăietoare fiind cunoscute.

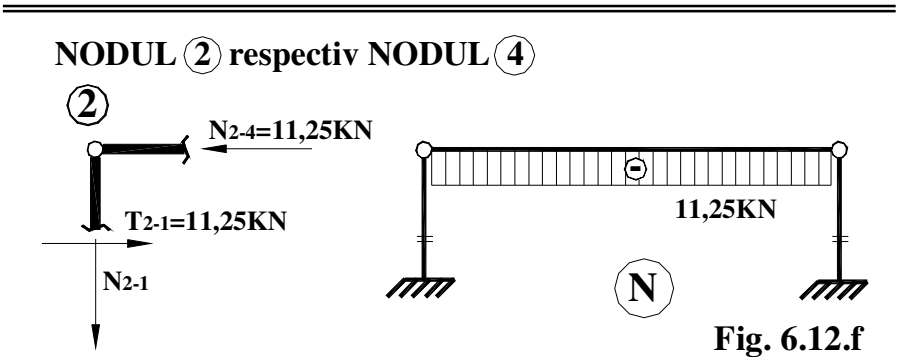


Fig. 6.12.f

$$\sum_{nod} X_i = 0 \Rightarrow 11{,}25 - N_{24} = 0$$

$$\sum_{nod} Y_i = 0 \Rightarrow N_{21} = 0$$

APLICAȚIA 3

Se propune schema pentru calculul static al cadrului transversal, având stâlpi cu secțiunea în trepte, de hală parter din **fig.6.13**. Se cere determinarea diagramelor de eforturi **M**,**T**,**N** şi verificarea lor.

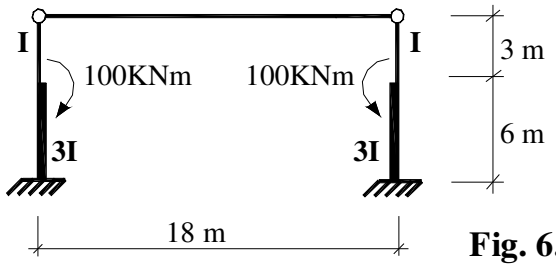


Fig. 6.13

STRUCTURA ESTE O DATĂ STATIC NEDERMINATĂ după cum rezultă din relația:

$$n = N = l + r - 3c = 2 \cdot 2 + 6 - 3 \cdot 3 = 1$$

Rezolvarea se va face integral pe sistemul de bază obținut prin eliminarea barei orizontale, dublu articulată, supusă numai la efort axial. (**Fig.6.13.a**)

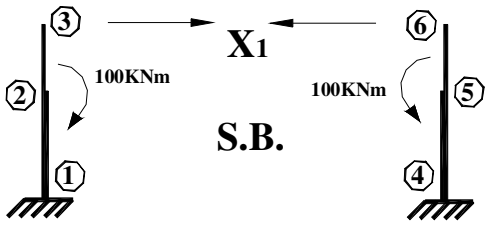


Fig. 6.13.a

Ecuația de condiție a metodei forțelor exprimă compatibilitatea deformatei sistemului de bază cu legăturile structurii reale:

$$\begin{cases}\Delta_1 = \Delta l_{36} = 0 \\ \Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0\end{cases} \quad \text{sau}$$

Rezolvarea sistemului de bază: acțiunea forțelor exterioare şi a necunoscutei $\mathbf{X_1=1}$. Calculul lungimilor transformate $\boldsymbol{\lambda}$. **(Fig.6.13.b)**

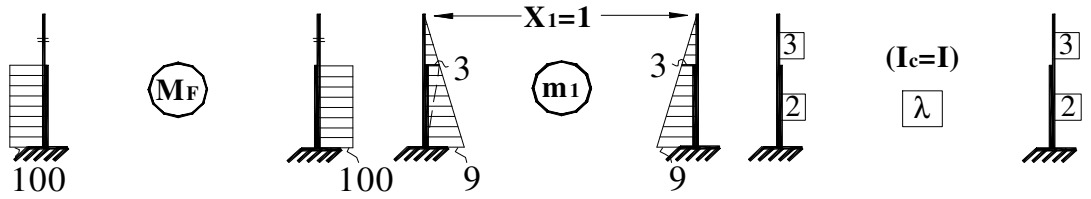


Fig. 6.13.b

$$\lambda_{12} = \lambda_{45} = 6 \cdot \frac{I}{3I} = 2; \qquad \lambda_{23} = \lambda_{56} = 3 \cdot \frac{I}{I} = 3$$

Calculul coeficienților necunoscutei şi a termenului liber. Determinarea necunoscutei $X_1 = N_{3\text{-}6}$

$$\delta_{11} = \int m_1^2 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\delta_{11} = 2(2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 1044$$

$$\Delta_{1F} = \int m_1 M_F \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\Delta_{1F} = 2(-3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 3) = -14400$$

$$1044X_1 - 14400 = 0 \Rightarrow X_1 = N_{36} = 13{,}793KN$$

Calculul, trasarea şi verificarea diagramei M (Fig.6.13.c)

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot X_1 = M_F + m_1 \cdot 13{,}793$$

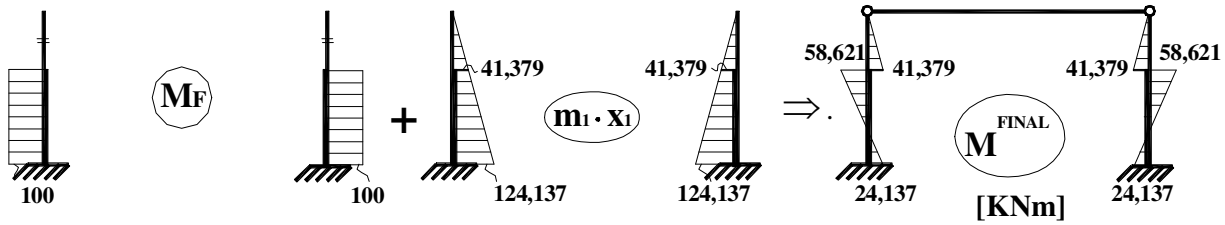


Fig. 6.13.c

Pentru **verificarea diagramei M^{FINAL}**, se va utiliza rotirea secțiunii **1**, **$\theta_1=0$**, cunoscută din situația reală:

$$\theta_1 = \int m_1^0 M^{FINAL} \frac{dx}{EI} = 0$$

Se va folosim formula Maxwell - Mohr pentru structurile static nedeterminate. Situația virtuală de încărcare construită pe o structura static determinată (diferită de sistemul de bază folosit la rezolvarea structurii), obținută din structura reală, este prezentată în **fig.6.13.d**

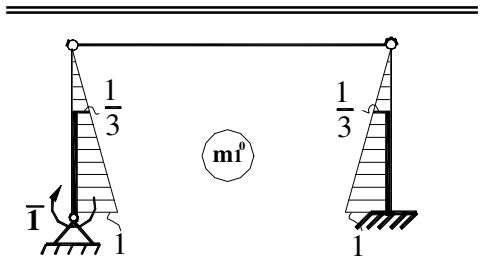


Fig. 6.13.d

$$6EI\theta_1 = 2(2\cdot 2\cdot 24{,}137\cdot 1 + 2\cdot 24{,}137\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot 1\cdot 58{,}621 -$$

$$-2\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 58{,}621 + 2\cdot 3\cdot 41{,}379\cdot\frac{1}{3}) =$$

$$2(195{,}397 - 195{,}403) \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{|195{,}397 - 195{,}403|}{|-195{,}403|}\cdot 100\% = 0{,}003\%$$

$$\varepsilon < 1\%$$

Calculul şi trasarea diagramei T (Fig.6.13.e)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru pentru stâlpi , momentele încovoietoare fiind cunoscute.

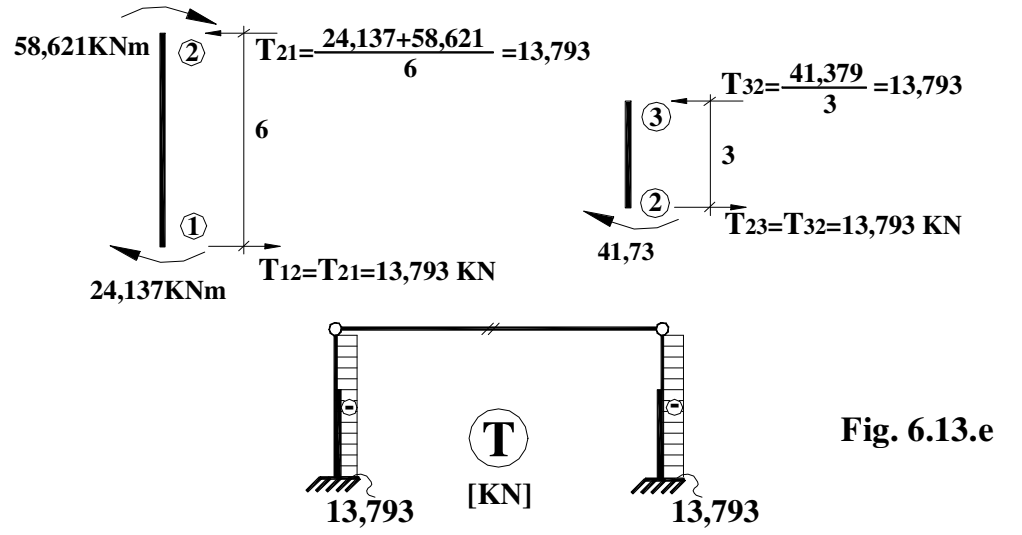


Fig. 6.13.e

Calculul şi trasarea diagramei N (Fig.6.13.f)

Se vor folosi ecuațiile de echilibru exprimate pentru fiecare nod.

NODUL ③ respectiv NODUL ⑥

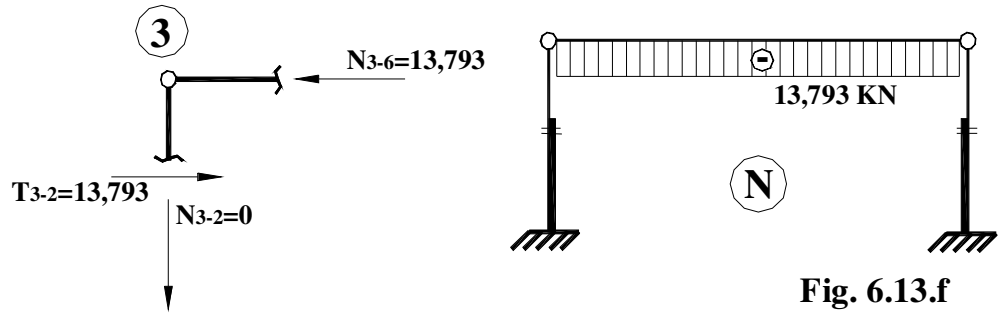


Fig. 6.13.f

$$\sum_{nod} X_i = 0 \Rightarrow 13{,}793 - N_{36} = 0$$

$$\sum_{nod} Y_i = 0 \Rightarrow N_{32} = 0$$

APLICAȚIA 4

Se propune schema pentru calculul static al cadrului transversal de hală industrială din **fig.6.14**. Se cere determinarea diagramelor **M**,**T**,**N** şi verificarea lor.

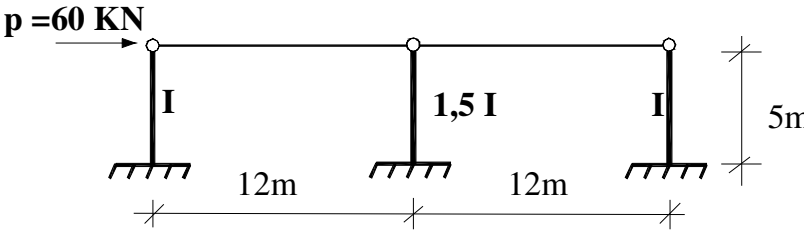


Fig. 6.14

Aplicând formula de calcul folosită în aplicaţiile anterioare se constată că STRUCTURA ESTE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINATĂ:

$$n = N = l + r - 3c = 4 \cdot 2 + 9 - 3 \cdot 5 = 2$$

Se va utiliza tipul de **sistem de bază** folosit ca şi pâna acum, obţinut prin eliminarea barelor orizontale dublu articulate, în care apar numai eforturi axiale. (**Fig.6.14.a**)

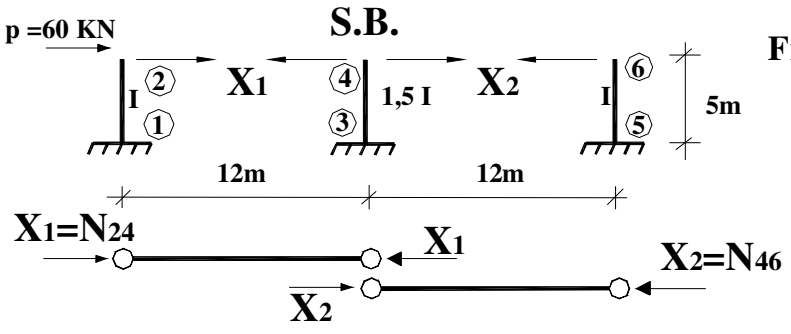


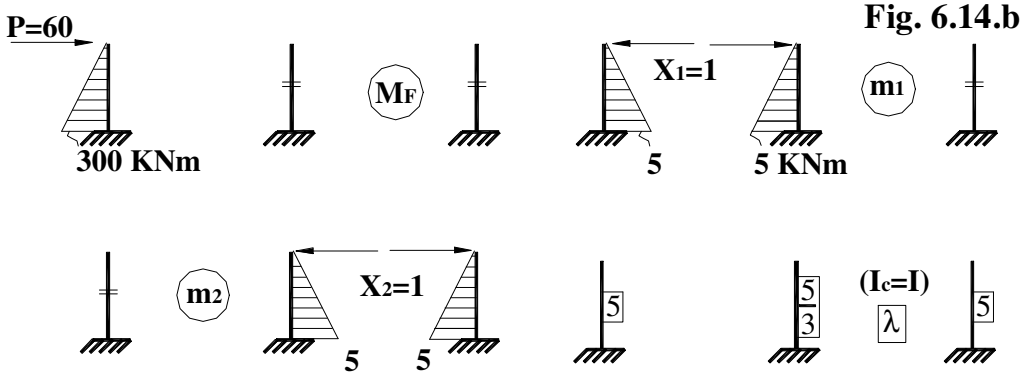
Fig. 6.14.a

Sistemul ecuațiilor de condiție se obține impunând sistemului de bază condiția ca deformata lui să respecte legăturile structurii reale.

$$\begin{cases}\Delta_1 = \Delta l_{24} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta l_{46} = 0\end{cases} \; sau \; \begin{cases}\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{21}X_2 + \Delta_{2F} = 0\end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază: acțiunea forțelor exterioare şi a necunoscutelor $\mathbf{X_1=1}$ respectiv $\mathbf{X_2=1}$. Calculul lungimilor transformate. (**Fig.6.14.b**)

Fig. 6.14.b



Calculul coeficienților necunoscutelor şi a termenilor liberi. Determinarea necunoscutelor X_1 şi X_2

$$\delta_{11} = \int m_1^2 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\delta_{11} = (2\cdot 5\cdot 5\cdot 5) + 2\cdot\frac{5}{3}\cdot 5\cdot 5 = 333{,}33$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int m_1 m_2 \frac{dx}{EI}; \Rightarrow 6EI\delta_{12} = 6EI\delta_{21} = -2\cdot\frac{5}{3}\cdot 5\cdot 5 = -83{,}33$$

$$\delta_{22} = \int m_2^2 \frac{dx}{EI}; \Rightarrow 6EI\delta_{22} = 2\cdot\frac{5}{3}\cdot 5\cdot 5 + 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 333{,}33$$

$$\Delta_{1F} = \int m_1 M_F \frac{dx}{EI}; \Rightarrow 6EI\Delta_{1F} = -2\cdot 5\cdot 300\cdot 5 = -15000$$

$$\Delta_{2F} = \int m_2 M_F \frac{dx}{EI}; \Rightarrow 6EI\Delta_{2F} = 0$$

Introducând în sistemul ecuațiilor de condiție se obține:

$$\begin{cases}333{,}33X_1 - 83{,}33X_2 - 15000 = 0 \\ -83{,}33X_1 + 333{,}33X_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_1 = N_{24} = 48KN \\ X_2 = N_{46} = 12KN\end{cases}$$

Calculul diagramei M (Fig.6.14.c)

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 = M_F + m_1 \cdot 48 + m_2 \cdot 12$$

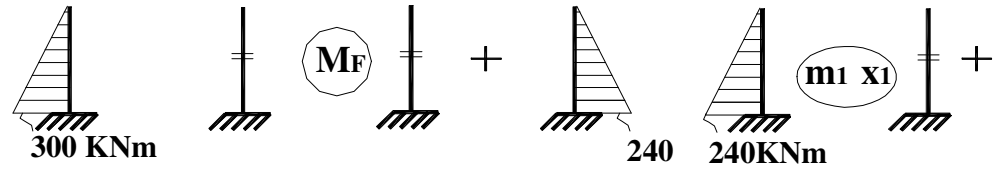
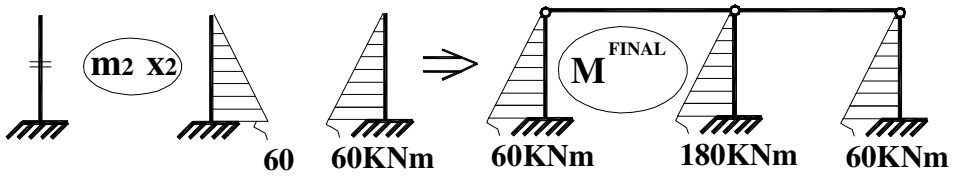


Fig. 6.14.c



Verificarea diagramei M^{FINAL} (Fig.6.14.d)

Se va utiliza rotirea secțiunii **1** , $\theta_1=0$, cunoscută din situația reală:

$$\theta_1 = \int m_1^0 M^{FINAL} \frac{dx}{EI} = 0$$

Situația virtuală de încărcare este:

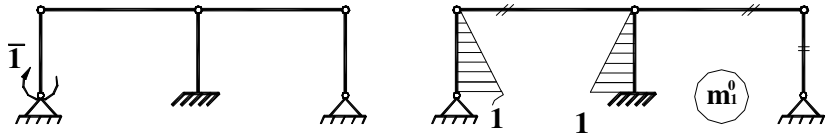


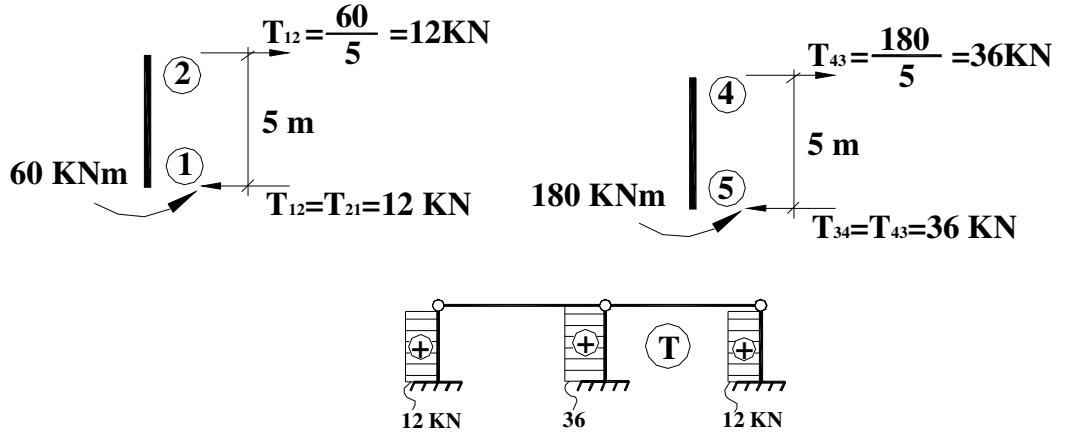
Fig. 6.14.d

Calculând rotirea se obține:

$$6EI\theta_1 = -2 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 180 \cdot 1 = -600 + 600 = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0\%$$

Calculul şi trasarea diagramei T (Fig.6.14.e)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru pentru fiecare stâlp, momentele încovoietoare fiind cunoscute.



Calculul şi trasarea diagramei N (Fig.6.14.f)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod, forțele tăietoare fiind cunoscute.

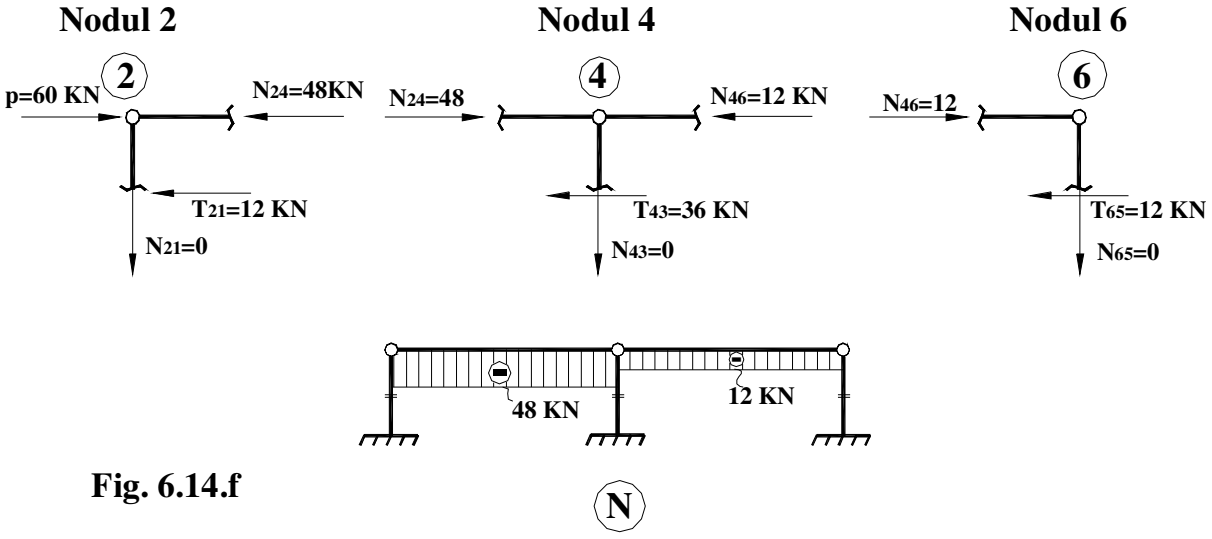


Fig. 6.14.f

NODUL 2

$\sum X_i = 0 \Rightarrow 60-12-N_{24}=0;$

N_{24} **=48** ***KN=X1***

$\sum Y_i = 0 \Rightarrow$ N_{21}**=0**

NODUL 4

$\sum X_i = 0 \Rightarrow 48-36-N_{46}=0;$

N_{46}**=12** ***KN=X2***

$\sum Y_i = 0 \Rightarrow$ N_{43} **=0**

NODUL 6

$\sum X_i = 0 \Rightarrow N_{46}-12=0$

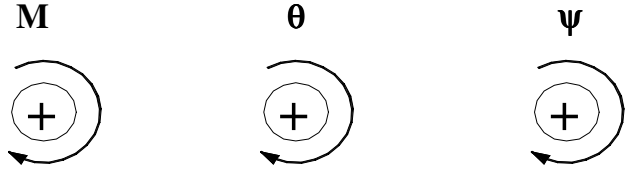
N_{46}**=12** ***KN=X2***

$\sum Y_i = 0 \Rightarrow$ N_{65}**= 0**

CAPITOLUL 8.
METODA DEPLASĂRILOR (M.D.)

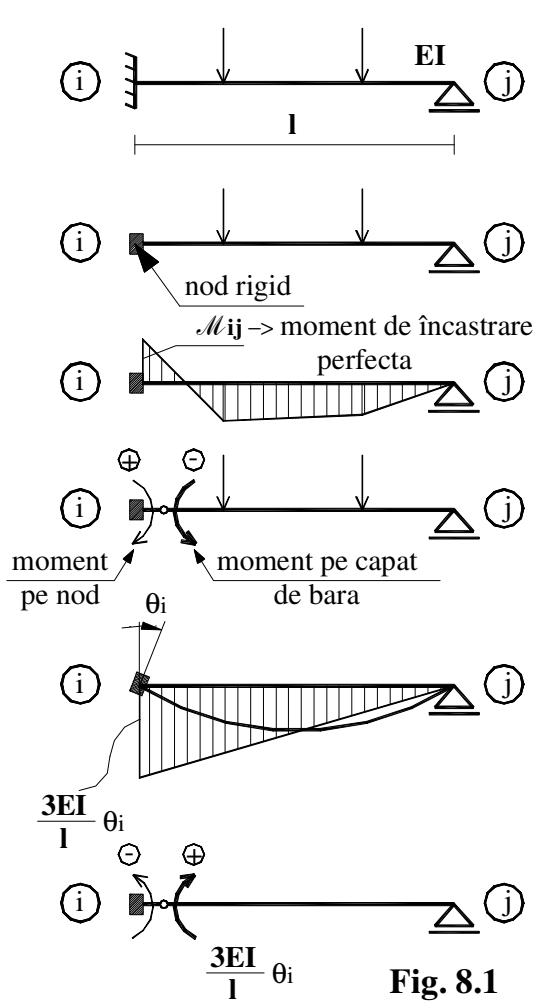
Schimbarea convenţiei de semne faţă de metoda forţelor:

În metoda deplasărilor vom considera momentele, rotirile secţiunilor de la capetele barelor şi rotirile de bară pozitive în sens orar:



Conform acestei convenţii, rezultatele obţinute în metoda forţelor la grinzile cu o singură deschidere preluate în totalitate în metoda deplasărilor devin după cum urmează (**Fig. 8.1** si **Fig. 8.2**):

I. Bara cuprinsă între un nod şi un reazem simplu (sau articulaţie)



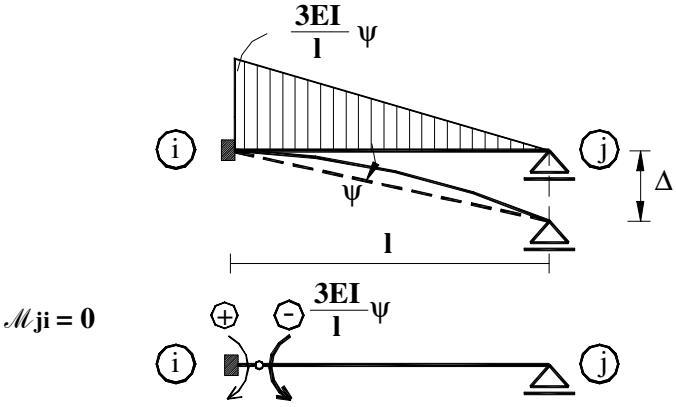


Fig. 8.1

Momentul final pe capătul barei devine:

$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + \frac{3EI}{l}\theta_j - \frac{3EI}{l}\psi$ sau,

$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + K_{ij}\theta_j + \overline{K}_{ij}\psi$ unde,

$Kij = \frac{3EI}{l} \rightarrow$ reprezintă rigiditatea barei la rotire de nod

$\overline{K}_{ij} = -\frac{3EI}{l} \rightarrow$ reprezintă rigiditatea barei la rotire de bară

OBS: *$\mathcal{M}_{ij}, \theta_i$ şi ψ se introduc cu semnele lor.*

II. Bara cuprinsă între două noduri rigide (dublu încastrată)

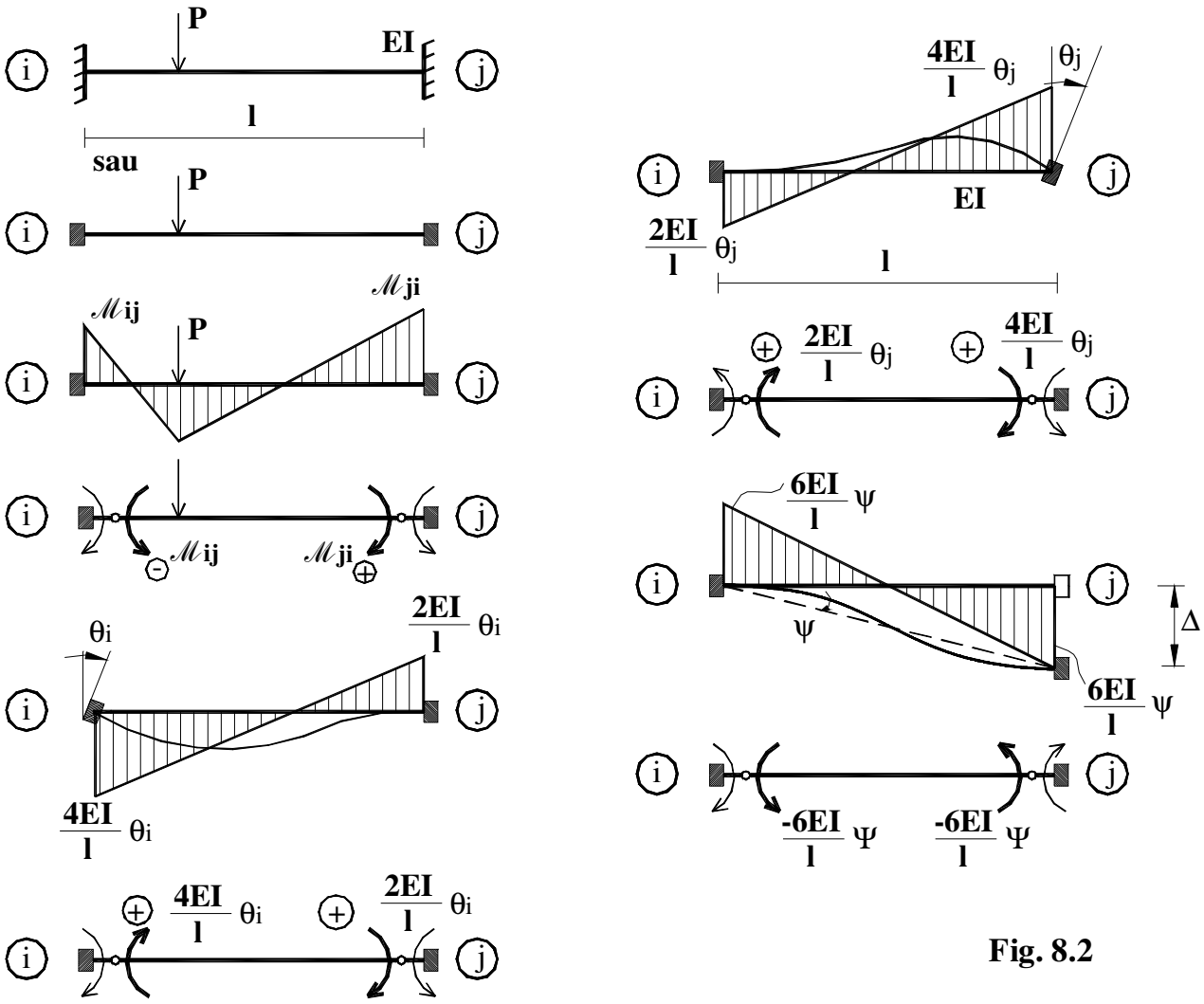


Fig. 8.2

Momentele finale pe capetele barei devin:

$$\begin{cases} \mathrm{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + \dfrac{4EI}{l}\theta_i + \dfrac{2EI}{l}\theta_i - \dfrac{6EI}{l}\psi \\ \mathrm{M}ji = \mathcal{M}ji + \dfrac{2EI}{l}\theta_i + \dfrac{4EI}{l}\theta_j - \dfrac{6EI}{l}\psi \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} \mathrm{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + K_{ij}\theta_i + \dfrac{1}{2}K_{ij}\theta_j + \overline{K}_{ij}\psi \\ \mathrm{M}_{ji} = \mathcal{M}_{ji} + \dfrac{1}{2}K_{ij}\theta_i + K_{ij}\theta_j + \overline{K}_{ij}\psi \end{cases} \quad \text{unde,}$$

$K_{ij} = \frac{4EI}{l}$; $\overline{K}_{ij} = -\frac{6EI}{l}$, iar $\mathcal{M}_{ij}$, $\mathcal{M}_{ji}$, θ_i, θ_j şi ψ se introduc cu semnele lor.

OBSERVAȚII:

În metoda deplasărilor se va lucra cu momente pe capăt de bară.

Pornind de la expresia momentelor finale pe capetele barelor se constată că starea de eforturi pe bară este complet definită dacă se cunosc rotirile nodurilor θ_i şi θ_j , rotirea axei barei ψ şi forțele exterioare care acționează pe bară.

Necunoscutele în metoda deplasărilor sunt deplasările nodurilor, rotiri de nod θ şi rotiri de bară ψ, produse de translațiile Δ ale nodurilor.

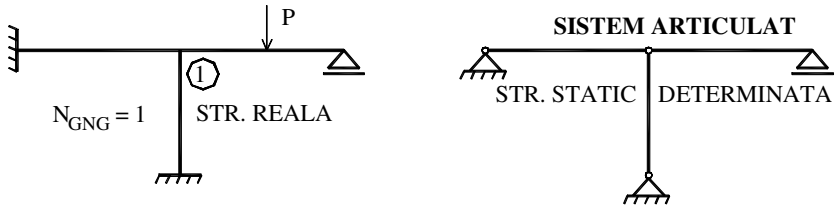
Cadre cu noduri fixe (C.N.F.). Cadre cu noduri deplasabile (C.N.D.). Grad de nedeterminare geometrică (G.N.G.).

Poziția deformată a unui cadru este definită complet dacă se cunosc deplasările nodurilor (rotiri **θ** şi translații **Δ**) şi încărcările barelor. Dacă se acceptă ipoteza că barele structurilor nu se deformează axial, cadrele se împart în două categorii:

- cadre cu noduri fixe (**C.N.F.**)
- cadre cu noduri deplasabile (**C.N..D.**)

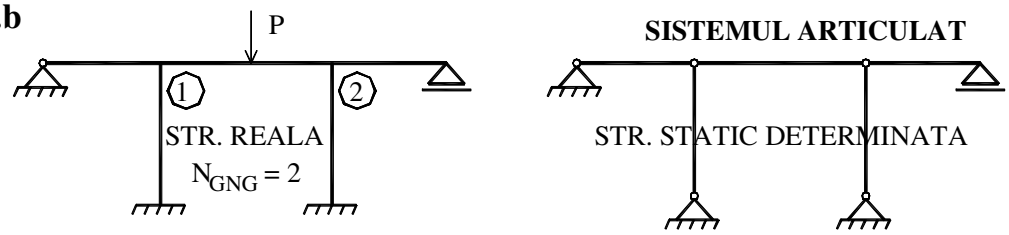
Cadrele cu noduri fixe (**C.N.F.**) se deformează prin rotirea nodurilor, fără translația acestora. Fie exemplele din **fig. 8.3 a, b:**

Fig. 8.3.a



$$n = N = l + r - 3c = 2 \times 2 + 5 - 3 \cdot 3 = 0$$

Fig. 8.3.b



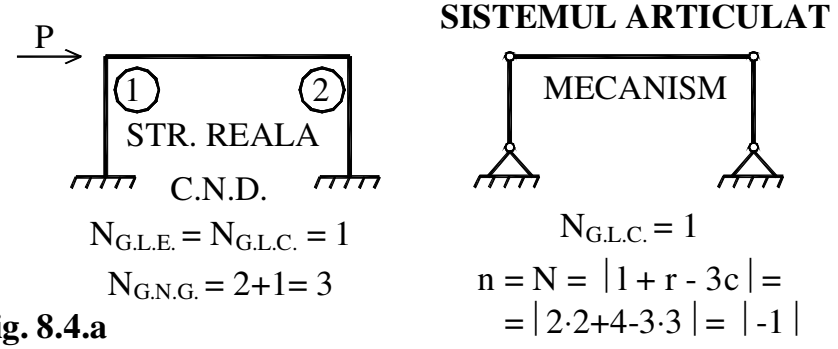
$$n = N = l + r - 3c = 4 \times 2 + 7 - 3 \cdot 5 = 0$$

Studiul acestor cadre se face cu ajutorul sistemelor articulate corespunzătoare lor, obținute prin transformarea nodurilor rigide şi a încastrărilor din reazeme în articulații. Structurile articulate astfel obținute sunt static determinate, invariabile geometric şi verifică relația:

$$n = N = l + r - 3c = 0$$

Gradul de nedeterminare geometrică la cadrele cu noduri fixe ($\mathbf{N_{G.N.G.}}$) este egal cu numărul de noduri rigide al structurii, reprezentând numărul necunoscutelor (rotiri de nod) în metoda deplasărilor.

Cadrele cu noduri deplasabile (**C.N.D.**) se deformează prin rotirea şi translația nodurilor. Translațiile nodurilor dau naştere la rotiri de bară. Fie cadrele din **fig. 8.4.a** şi **b:**



$N_{G.L.E.} = N_{G.L.C.} = 1$

$N_{G.N.G.} = 2+1= 3$

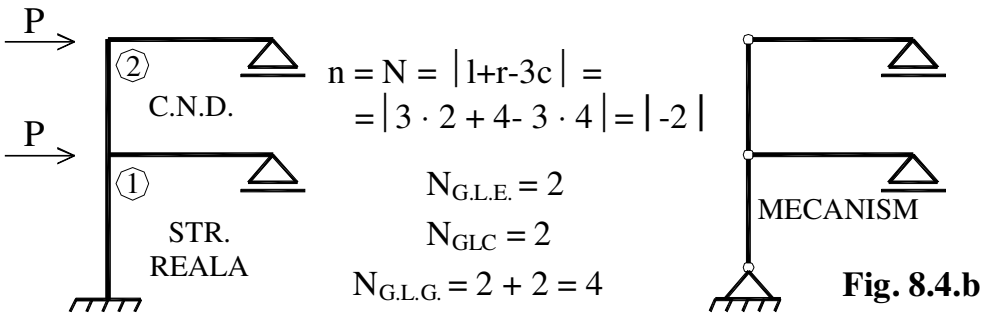
$N_{G.L.C.} = 1$

$n = N = |1 + r - 3c| =$

$= |2\cdot2+4-3\cdot3| = |-1|$

Fig. 8.4.a

În cazul ipotezei barelor nedeformabile axial, translațiile nodurilor unui cadru se grupează în grade de libertate elastică (G.L.E.). Numărul gradelor de libertate elastică al unui cadru este egal cu numărul gradelor de libertate cinematică al sistemului articulat corespunzător cadrului. Astfel cadrul din fig. 8.4.a este un cadru cu noduri deplasabile şi are un grad de libertate elastică. Gradul de nedeterminare geometrică al cadrului este egal cu numărul nodurilor rigide din cadru plus numărul gradelor de libertate elastică, în cazul de față: $N_{G.N.G.} = 2 + 1=3$.



$n = N = |1+r-3c| =$

$= |3 \cdot 2 + 4 - 3 \cdot 4| = |-2|$

$N_{G.L.E.} = 2$

$N_{GLC} = 2$

$N_{G.L.G.} = 2 + 2 = 4$

Fig. 8.4.b

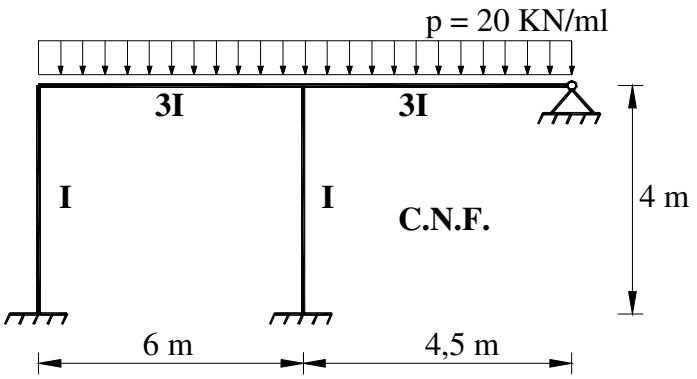
Cadrul etajat din fig. **8.4.b** este un cadru cu noduri deplasabile şi are două grade de libertate elastică. Numărul gradelor de nedeterminare geometrică este patru.

REZOLVAREA CADRELOR CU NODURI FIXE

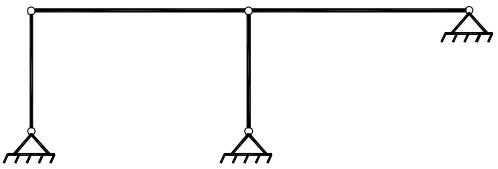
APLICAȚIA 1

Se cere rezolvarea cadrului cu noduri fixe din figura **8.5** prin scrierea sistemului ecuațiilor de condiție, trasarea diagramelor de eforturi **M, T, N** şi a poziției deformate. ($EI = 2 \cdot 10^5$ KNm^2)

Fig. 8.5



Sistemul articulat corespunzător structurii date este: **(Fig. 8.5.a):**



STR. STATIC DETERMINATĂ

$N_{ELC} = |l+r-3c| = |3\cdot2+6-3\cdot4| = 0$

$\Downarrow$

STR. INIȚIALĂ $\Rightarrow$ C.N.F.

Fig. 8.5.a$_1$

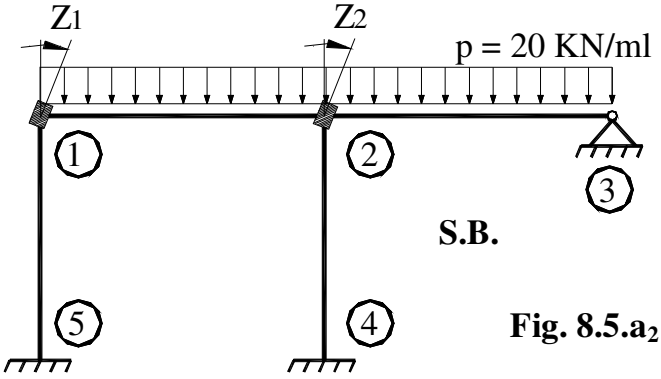


Fig. 8.5.a$_2$

Sistemul de bază este încărcat cu:

- Forte exterioare: M_F
- Necunoscute rotiri de nod: Z_1, Z_2

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} R_1 = r_{11}\cdot Z_1 + r_{11}Z_2 + R_{1F} = 0 \text{ (Reacțiune moment)} \\ R_2 = r_{21}\cdot Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0 \text{ (Reacțiune moment)} \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului de bază:

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B. ; $\mathcal{M}_F$ (Fig. 8.5.b)

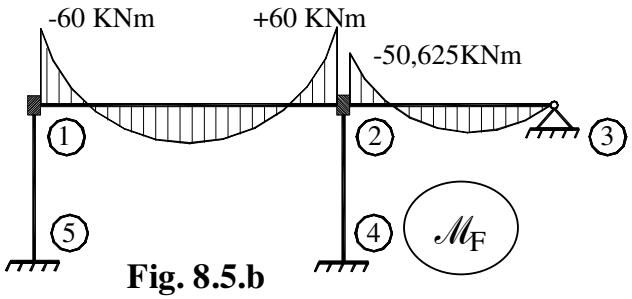


Fig. 8.5.b

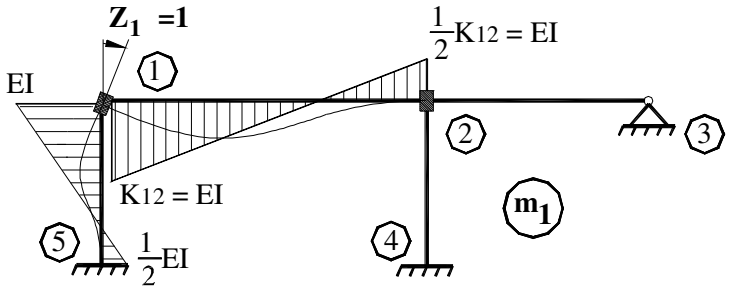
$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = -\frac{pl^2}{12} = \frac{20\cdot 6^2}{12} = -60 \text{ KN}$$

$$\mathcal{M}_{23} = -\frac{pl^2}{8} = \frac{20\cdot 4{,}5^2}{8} = -50{,}625 \text{ KN}$$

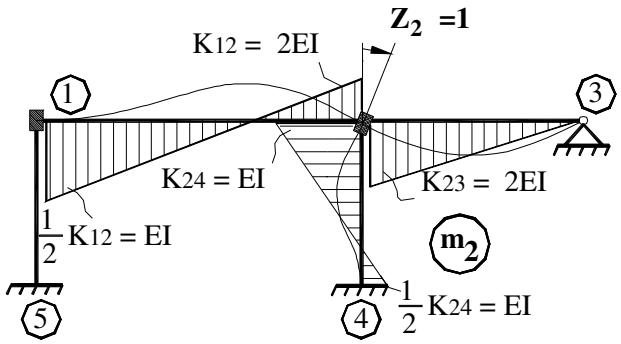
Acțiunea necunoscutelor $Z_1 = 1$ şi $Z_2 = 1$ pe S.B.: m_1 şi m_2 (Fig. 8.5.c)

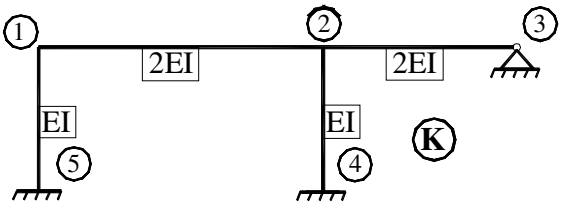
Fig. 8.5.c

Z_1=1



Z_2=1





Calculul rigidităților barelor la rotire de nod

$$K_{12} = \frac{4\,EI_{12}}{l_{12}} = \frac{4\cdot 3\,EI}{6} = 2\,EI$$

$$K_{23} = \frac{3\cdot EI_{23}}{l_{23}} = \frac{3\cdot 3\,EI}{4{,}5} = 2\,EI$$

$$K_{15} = K_{24} = \frac{4\,EI_{15}}{l_{15}} = \frac{4\,EI}{4} = EI$$

Calculul coeficienților necunoscutelor şi al termenilor liberi

$r_{11} = K_{12} + K_{15} = 3EI$ $\qquad r_{21} = r_{12} = \frac{1}{2}K_{12} = EI$

$r_{12} = \frac{1}{2}K_{12} = EI$ $\qquad r_{22} = K_{21} + K_{24} + K_{23} = 5EI$

$R_{1F} = \sum_{1} M_{1F} = -60$ $\qquad R_{2F} = \sum_{2} M_{2F} = +60 - 50{,}625 = 9{,}375$

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} 3EIZ_1 + EIZ_2 - 60 = 0 \\ EIZ_1 + 5EIZ_2 + 9{,}375 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + B - 60 = 0 \\ A + 5B + 9{,}375 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} EI \cdot Z_1 = A = 22{,}098 \\ EI \cdot Z_2 = B = -6{,}295 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 22{,}098 \\ B = -6{,}295 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1 = 22{,}098 \text{ x } \frac{1}{EI} \\ Z_2 = -6{,}295 \text{ x } \frac{1}{EI} \end{cases}$$

Calculul şi trasarea diagramei de moment M (Fig. 8.5.d)

$$M = \mathcal{M}_s + m_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Z_2$$

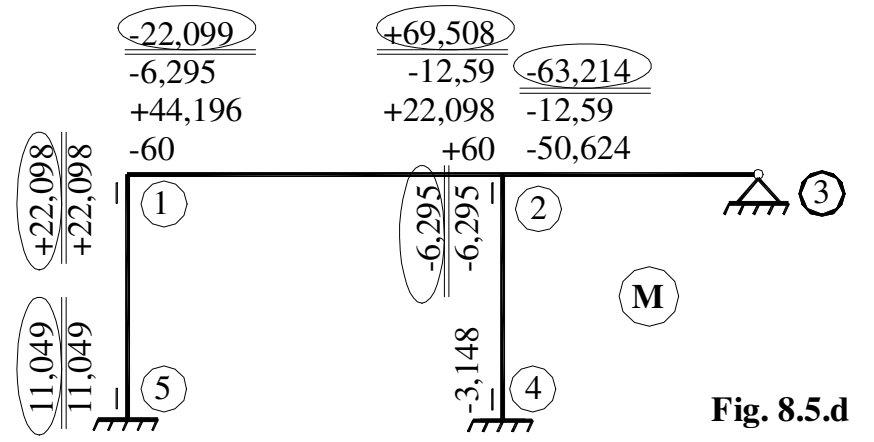


Fig. 8.5.d

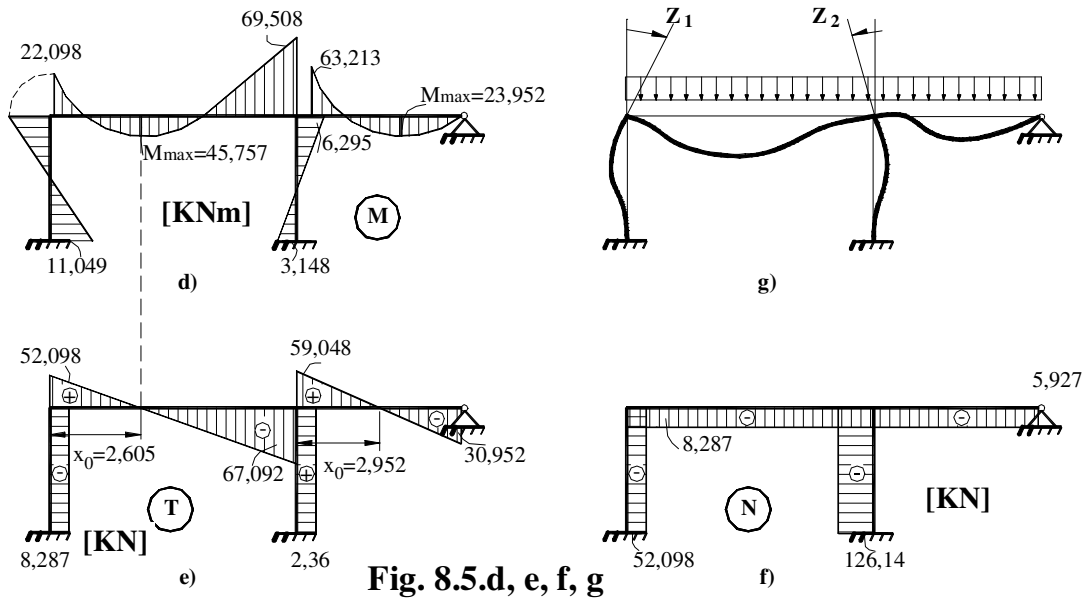
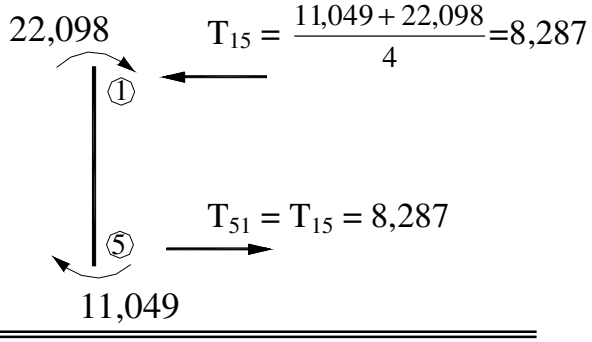


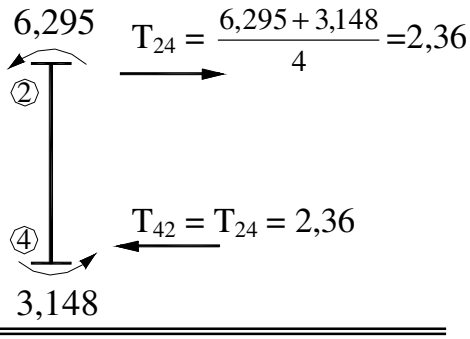
Fig. 8.5.d, e, f, g

Calculul forțelor tăietoare T (Fig. 8.5.e)

Bara 1-5



Bara 2-4



Bara 1-2

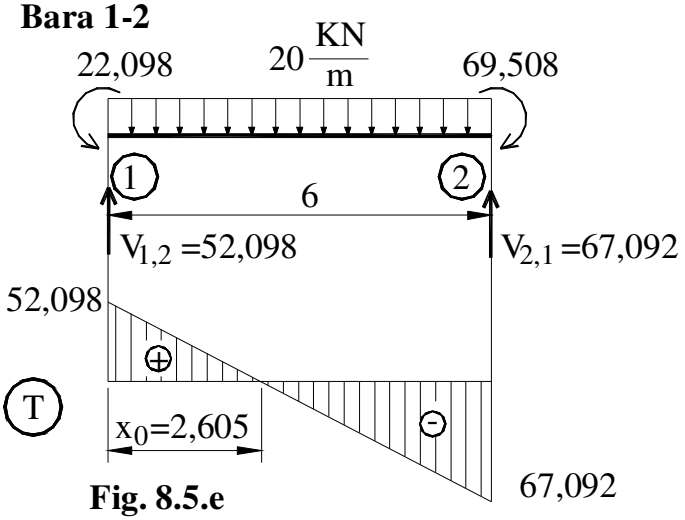


Fig. 8.5.e

$$(\Sigma M)_2 = 0 = V_{1,2} \cdot 6 - 22,098 - 20 \cdot 6 \cdot 3 + 69,508 = 0$$

$$V_{1,2} = \frac{312,59}{6} = 52,098KN$$

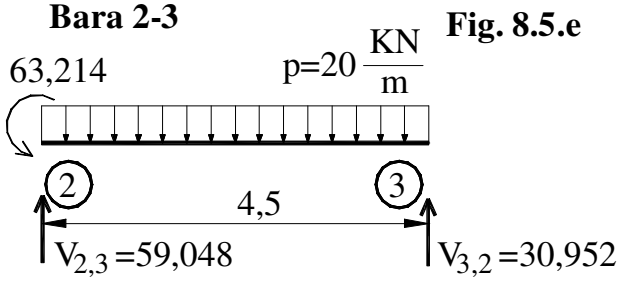
$$(\Sigma M)_1 = -V_{1,2} \cdot 6 + 69,508 + 20 \cdot 6 \cdot 3 - 22,098 = 0$$

$$V_{2,1} = \frac{407,41}{6} = 67,902KN$$

$$T_{x_0} = 52,098 - 20 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2,605m$$

$$M_{\max} = 52,098 \cdot 2,605 - 22,098 - 20 \cdot 2,605 \cdot \frac{2,605}{2} = 45,757KNm$$

Bara 2-3 **Fig. 8.5.e**



$$(\Sigma M)_3 = V_{2,3} \cdot 4,5 - 63,215 - 20 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = 0$$

$$V_{2,3} = \frac{265,715}{4,5} = 59,048KN$$

$$(\Sigma M)_2 = -V_{3,2} \cdot 4,5 + 20 \cdot 4,5 \cdot 2,25 - 63,215 = 0$$

$$V_{3,2} = \frac{139,285}{4,5} = 30,952KN$$

$$T_{x_0} = 59,048 - 20 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2,952m$$

$$M_{\max} = 59,048 \cdot 2,952 - 63,215 - 20 \cdot 2,952 \cdot \frac{2,952}{2} = 23,952KNm$$

Calculul forțelor axiale N (Fig. 8.5.f)

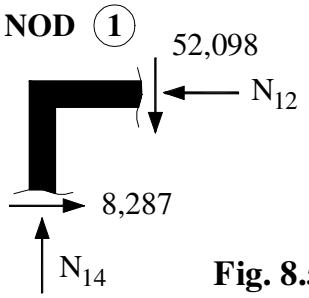


Fig. 8.5.f

$$\sum X_i = 0$$

$$N_{12} = 8,287KN$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$N_{1-4} = 52,098KN$$

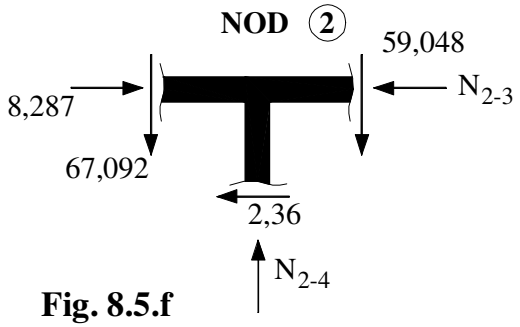


Fig. 8.5.f

$$\sum X_i = 8,287 - 2,36 - N_{2-3} = 0$$

$$N_{2-3} = 5,927KN$$

$$\sum Y_i = N_{2-4} - 67,092 - 59,048 = 0$$

$$N_{2-4} = 126,14KN$$

APLICAȚIA 2

Se cere calculul şi trasarea diagramei momentelor încovoietoare **M** la cadrul din **fig. 8.5,** (rezolvat anterior) utilizând procedeul distribuției şi transmiterii momentelor (CROSS).

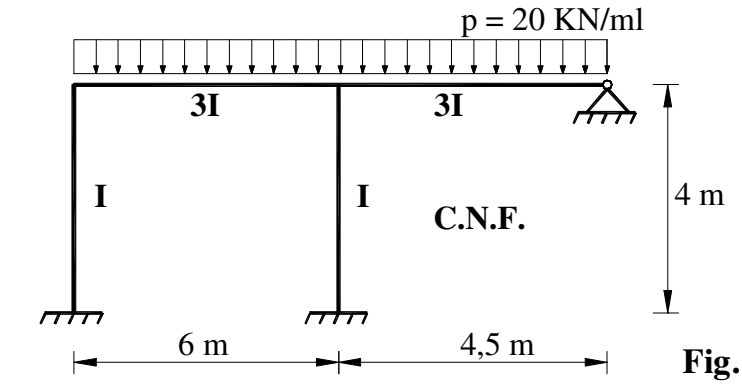
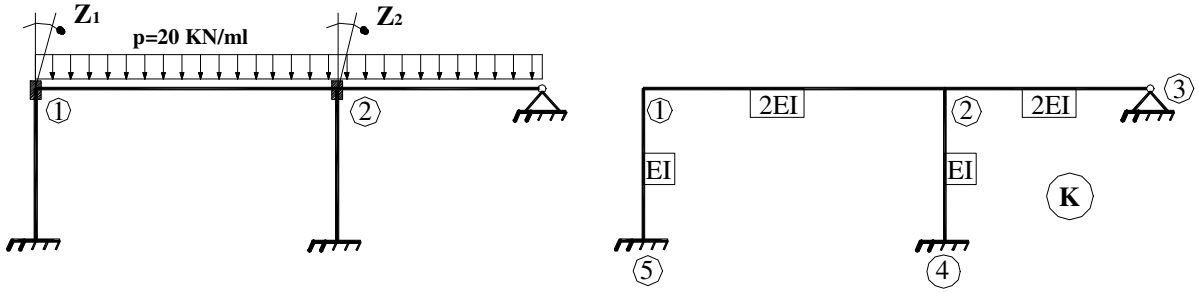


Fig. 8.5



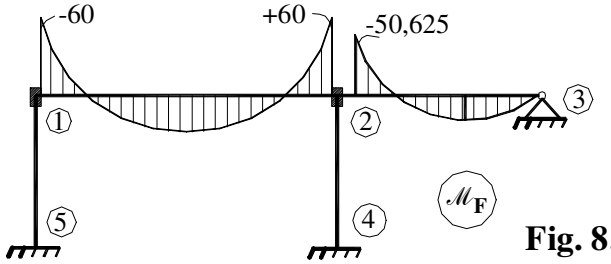


Fig. 8.5.b

Se observă că diagrama $\mathcal{M}_F$ nu are nodurile în echilibru, deoarece acestea sunt blocate la rotire.

Pentru obținerea diagramei de moment **M** se vor debloca pe rând cele două noduri, acestea rotindu-se sub acțiunea momentului neechilibrat pe nod: $\overline{M_i} = -\sum_i M_{ij}$

Momentul neechilibrat se distribuie capetelor de bară care intră în nod, funcție de rigiditatea fiecărei bare prin intermediul coeficienților de distribuție: $d_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_i}$

unde,

K_{ij} → reprezintă rigiditatea la rotire de nod a barei **i-j**

$K_i = \sum K_{ij}$ → reprezintă rigiditatea nodului **i**

$d_{ij}\overline{M}_i$ → reprezintă momentul distribuit barei **ij**

Momentele distribuite se transmit capetelor de bară opuse pe jumătate, dacă acestea sunt noduri sau încastrări din reazeme. Procedeul iterativ presupune parcurgerea a patru paşi pentru fiecare nod deblocat:

- pasul **1** → distribuția momentului neechilibrat pe nod $\overline{M_i}$ capetelor de bară care intră în nod: $d_{ij}\overline{M}_i \rightarrow$ moment distribuit

- pasul **2** → verificarea operației de distribuție

$$\sum_{\mathbf{i}} d_{ij}\overline{M}_i = \overline{M}_i$$

- pasul **3** → transmiterea momentelor distribuite capetelor de bară opuse, docă sunt alte noduri sau încastrări din reazeme: $\frac{1}{2}d_{ij}\overline{M}_i \rightarrow$ moment transmis

- pasul **4** → blocarea nodului **i** în poziția rotită, semnalând echilibrul perfect al acestuia (se trag nişte linii deasupra momentelor distribuite)

Operația se repetă rând pe rând pentru fiecare nod al cadrului până când momentul neechilibrat pe nod scade sub limita convenită inițial. În exemplul de față se admite ca limită $\overline{M}_i = 0{,}001\ KN \cdot m$, practic o valoare nulă.

Iterația se face pe schema statică a structurii, pe care au fost trecute rigiditățile la rotire de nod $\mathbf{K_{ij}}$, coeficienții de distribuție d_{ij} şi momentele de încastrare perfectă $\mathscr{M}_{ij}$. **(fig 8.5.h)**

Calculul factorilor de distribuție

Nodul 1

$$K_1 = K_{12} + K_{14} = 3EI$$

$$d_{12} = \frac{2EI}{3EI} = \frac{2}{3}$$

$$d_{14} = \frac{EI}{3EI} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_1 d_{ij} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Nodul 2

$$K_2 = K_{21} + K_{23} + K_{24} = 5EI$$

$$d_{21} = \frac{K_{21}}{K_2} = \frac{2EI}{5EI} = 0{,}4 = d_{23}$$

$$d_{24} = \frac{K_{24}}{K_2} = \frac{EI}{5EI} = 0{,}2$$

$$\sum d_{ij} = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1{,}00$$

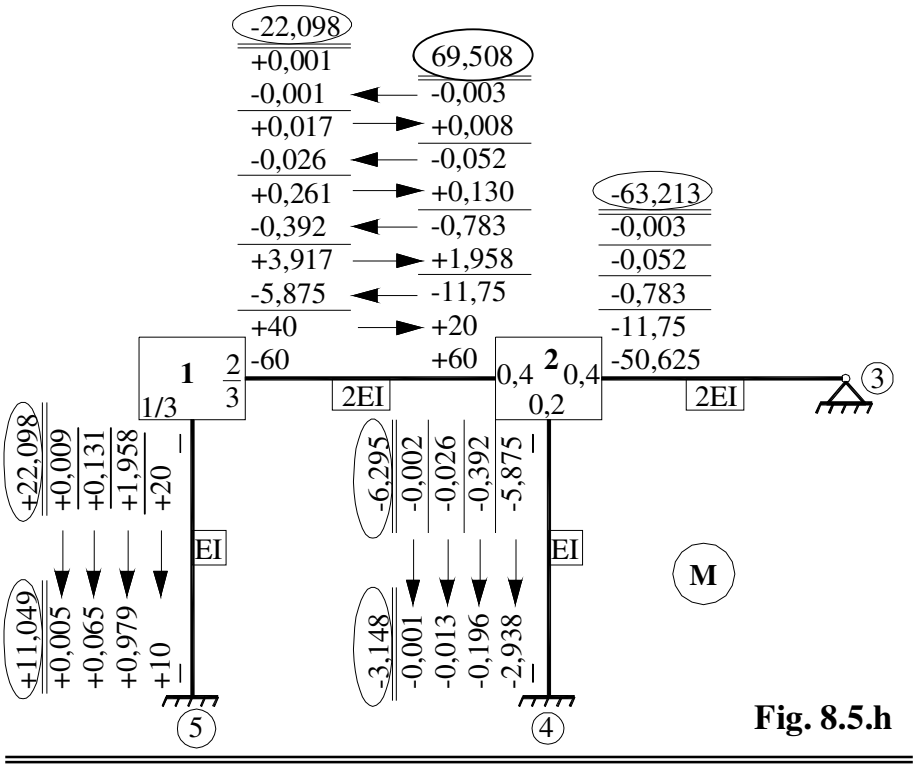
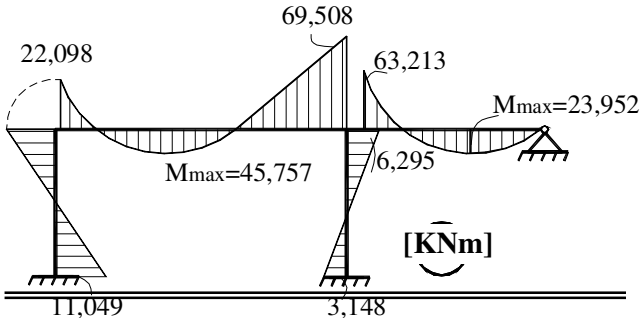


Fig. 8.5.h

Nod	$\overline{M}_i = -\sum_i M_{ij}$
1	+60
2	-(60+20-50,625)=-29,375
1	+5,875
2	-1,958
1	+0,395
2	-0,130
1	+0,026
2	-0,008
1	+0,001

Fig. 8.5.d



OBSERVATIE:

Diagrama obținută este practic identică cu cea de la aplicația anterioară.

APLICAȚIA 3

Pentru cadrul din **Fig 8.6** se cere calculul şi trasarea diagramelor de eforturi **M, T, N** utilizând procedeul distribuției şi transmiterii momentelor şi reprezentarea poziției deformate.

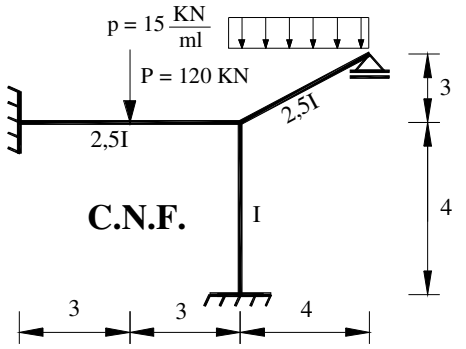
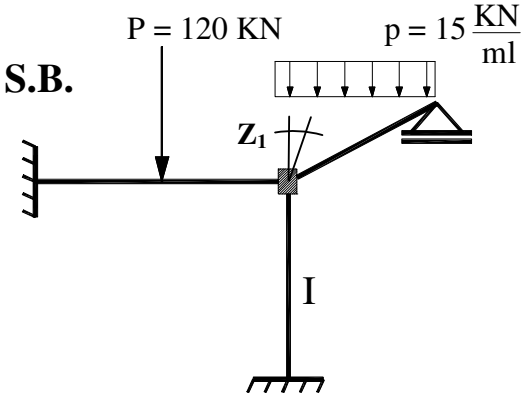


Fig. 8.6



Calculul momentelor de încastrare perfectă: $\mathcal{M}_F$ (Fig.8.6.b)

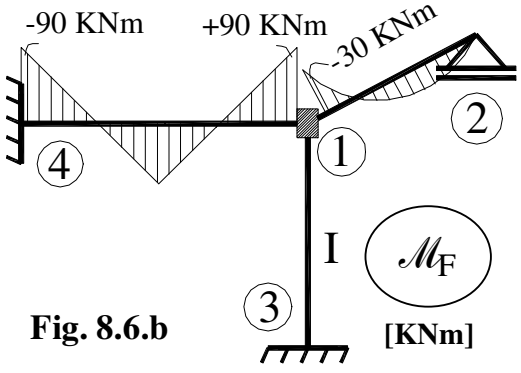
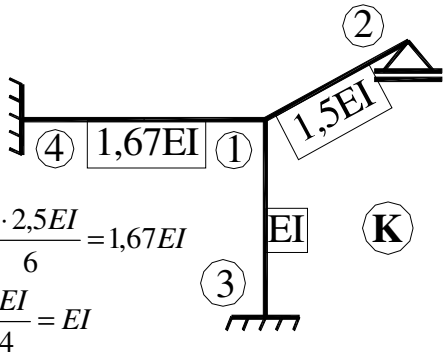


Fig. 8.6.b

Se observă că structura are un singur nod, fix, legat prin două bare de două puncte fixe (încastrările din rezemări).

Calculul rigidităților barelor la rotire de nod (Fig. 8.6.a)



$$K_{14} = \frac{4 \cdot 2{,}5EI}{6} = 1{,}67EI$$

$$K_{13} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{12} = \frac{3 \cdot 2{,}5EI}{5} = 1{,}5EI$$

Fig. 8.6.a

$$\mathcal{M}_{41} = -\mathcal{M}_{14} = -\frac{p \cdot l}{8} = -\frac{120 \cdot 6}{8} = -90KNm$$

$$\mathcal{M}_{12} = -\frac{p \cdot l^2}{8} = -\frac{15 \cdot 4^2}{8} = -30KNm$$

Calculul factorilor de distribuție

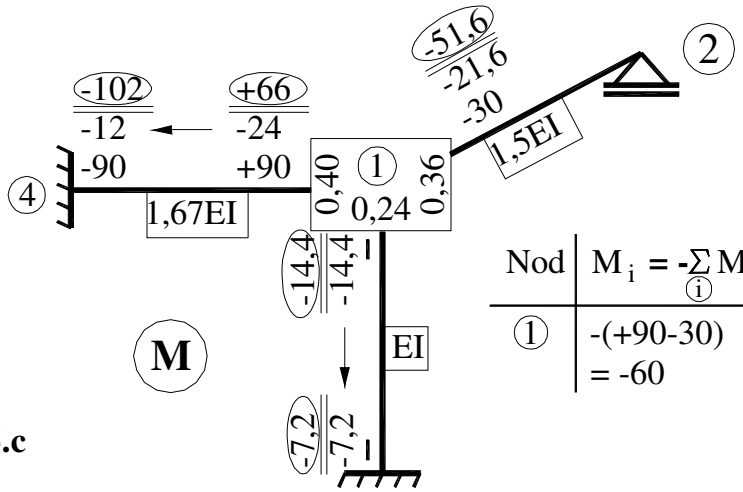
$$K_1 = K_{14} + K_{12} + K_{13} = 4{,}17EI$$

$$d_{14} = \frac{K_{14}}{K_1} = \frac{1{,}67EI}{4{,}17EI} = 0{,}4$$

$$d_{13} = \frac{K_{13}}{K_1} = \frac{EI}{4{,}17EI} = 0{,}24$$

$$d_{12} = \frac{K_{12}}{K_1} = \frac{1{,}5EI}{4{,}17EI} = 0{,}36$$

$$\sum d_{1j} = 0{,}4 + 0{,}24 + 0{,}36 = 1{,}00$$



Nod	$M_i = -\sum_{(i)} M_{ij}$
(1)	-(+90-30) = -60

Fig. 8.6.c

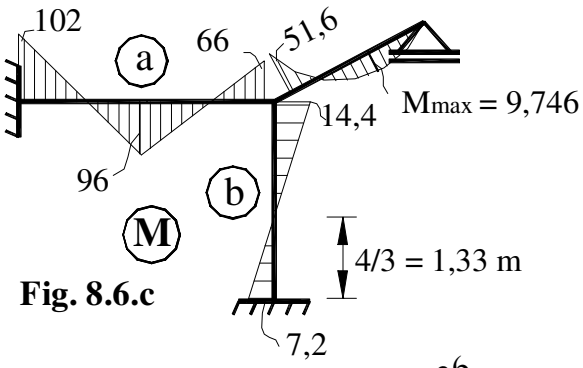


Fig. 8.6.c

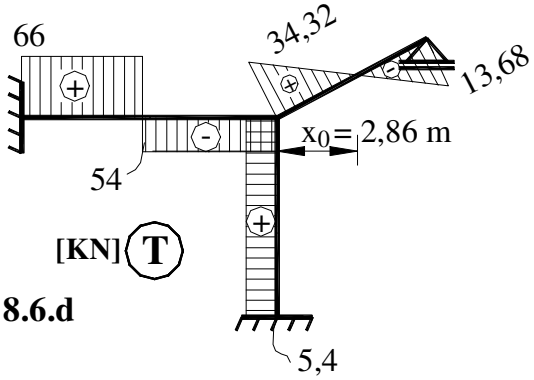


Fig. 8.6.d

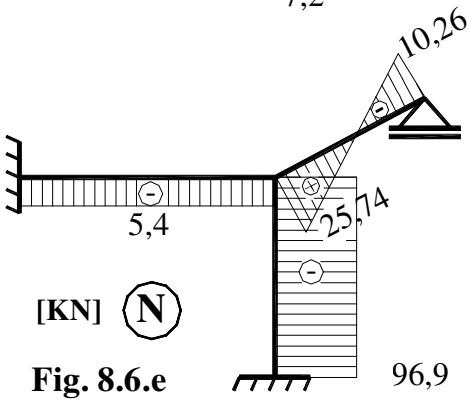


Fig. 8.6.e

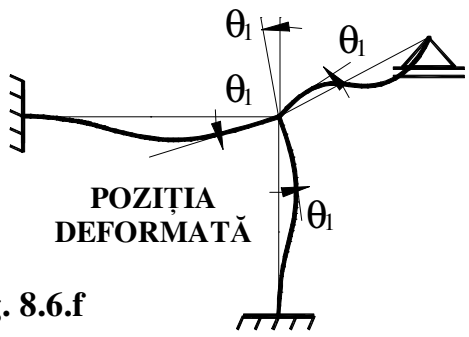
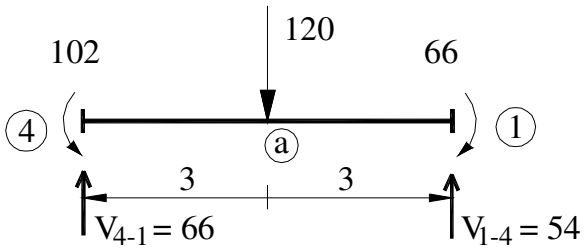


Fig. 8.6.f

Calculul forțelor tăietoare T (Fig. 8.6.d)

Bara 1-4



$$(\Sigma M)_1 = 0; V_{4-1} \cdot 6 - 102 + 66 - 120 \cdot 3 = 0$$

$$V_{4-1} = \frac{396}{6} = 66KN$$

$$(\Sigma M)_4 = 0; -V_{1-4} \cdot 6 + 66 - 102 + 120 \cdot 3 = 0$$

$$V_{1-4} = \frac{324}{6} = 54KN$$

$$Ma = 66 \cdot 3 - 102 = 96KNm$$

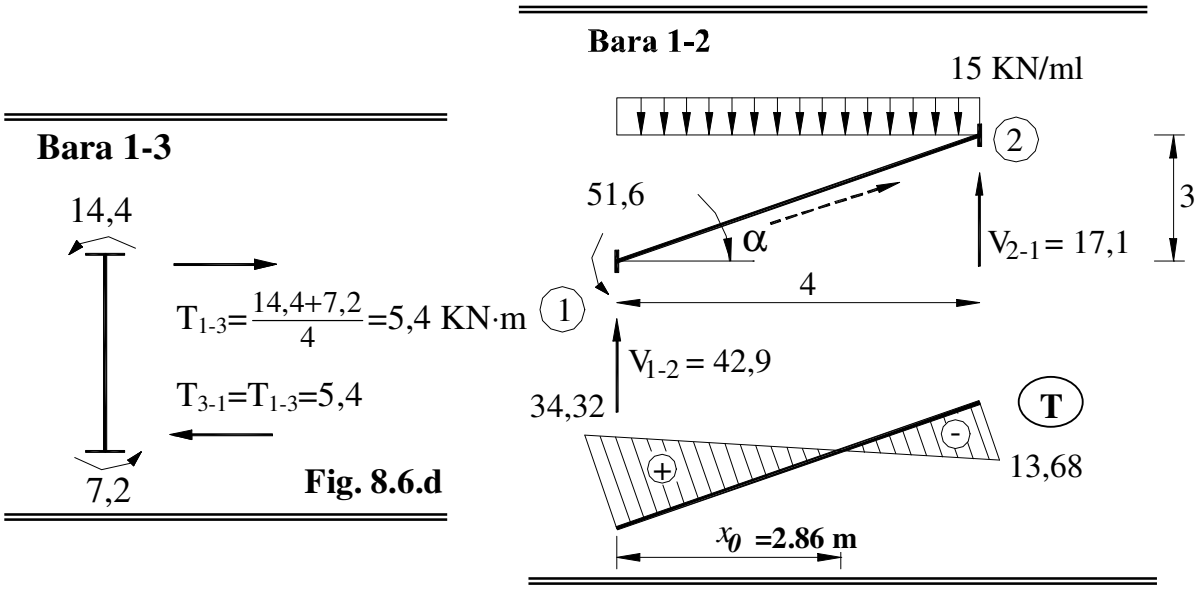


Fig. 8.6.d

$$\sin\alpha = 0{,}6; \qquad \cos\alpha = 0{,}8.$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow V_{1-2}\cdot 4 - 51{,}6 - 15\cdot 4\cdot 2 = 0$$

$$V_{1-2} = \frac{171{,}6}{4} = 42{,}9KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{2-1}\cdot 4 + 15\cdot 4\cdot 2 - 51{,}6 = 0$$

$$V_{2-1} = \frac{68{,}4}{4} = 17{,}1KN$$

$$T_{X_0} = 42{,}9\cdot\cos\alpha - 15x_0\cdot\cos\alpha = 0$$

$$x_0 = 2{,}86m$$

$$M_{max}=42{,}9\cdot 2{,}86-51{,}6-15\cdot\frac{2{,}86^2}{2}=9{,}747\ KN\cdot m$$

Calculul forțelor axiale N (Fig. 8.6.e)

Se vor calcula eforturile axiale N pe bara 1-2 utilizând desenul anterior:

$$N_{2-1} = +V_{2-1}\cdot\sin\alpha = 17{,}1\cdot 0{,}6 = +10{,}26KN$$

$$N_{1-2} = +V_{2-1}\cdot\sin\alpha - 15\cdot 4\cdot\sin\alpha = 10{,}26 - 60\cdot 0{,}6 = -25{,}74KN$$

OBSERVAȚIE:

Au fost reduse forțele de la dreapta secțiunii în care s-au efectuat calculele. În continuare se vor utiliza ecuațiile de echilibru exprimate pentru nodul 1, considerat un punct în plan.

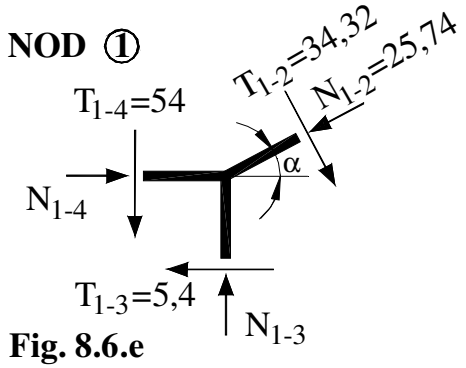


Fig. 8.6.e

$$\begin{cases}\Sigma Y_i = 0 = N_{1-3} - 54 - 34{,}32 \cdot \cos\alpha - 25{,}74 \cdot \sin\alpha \\ N_{1-3} - 54 - 34{,}32 \cdot 0{,}8 - 25{,}74 \cdot 0{,}6 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$N_{1-3} = 96{,}9KN$$

$$\begin{cases}\sum_{nod\,1} X_i = 0 = N_{1-4} - 5{,}4 - 25{,}74\cos\alpha + 34{,}32\sin\alpha \\ N_{1-4} - 5{,}4 - 25{,}74 \cdot 0{,}8 + 34{,}32 \cdot 0{,}6 = 0 \end{cases}$$

$$N_{1-4} = -5{,}4KN$$

Calculul deplasării verticale v_a (Fig. 8.6.f$_1$)

Deplasarea se calculează utilizând formula Maxwell-Mohr:

$$v_a = \int M \cdot m_a^{\circ} \cdot \frac{dx}{EI}$$

Se propune următoarea structură static determinată pentru trasarea diagramei $\mathbf{m^0_a}$:

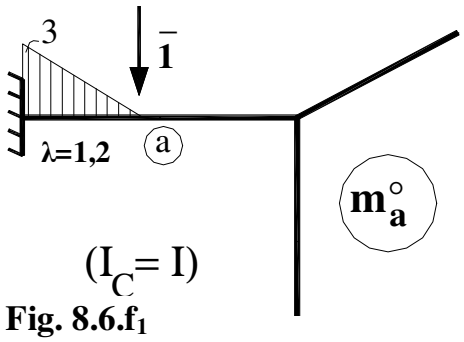


Fig. 8.6.f$_1$

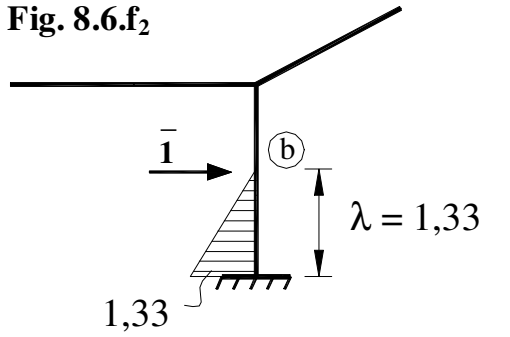
$$6EIv_a = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 102 \cdot 3 - 1{,}2 \cdot 96 \cdot 3 = 388{,}8$$

$$v_a = \frac{388{,}8}{6EI} = 0{,}324mm$$

$$EI = 2 \cdot 10^5 KN \cdot m^2$$

Calculul deplasării orizontale v_b (Fig. 8.6.f$_2$)

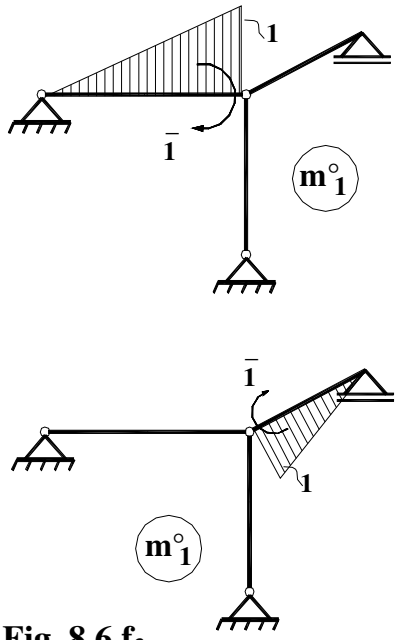
Fig. 8.6.f$_2$



$$6EIv_b = 2 \cdot 1{,}33 \cdot 7{,}2 \cdot 1{,}33 = 25{,}472$$

$$v_b = 0{,}0000215m$$

Calculul rotirii nodului θ_1 (Fig. 8.6.f$_3$)



$$6EI\theta_1 = +2{,}4\cdot 102\cdot 1 + 2\cdot 2{,}4\cdot 66\cdot 1 - 2{,}4\cdot 270\cdot 1 = -86{,}4$$

sau

$$6EI\theta_1 = -2\cdot 2\cdot 51{,}6\cdot 1 + 2\cdot 60\cdot 1 = -86{,}4$$

Rotirea nodului va fi:

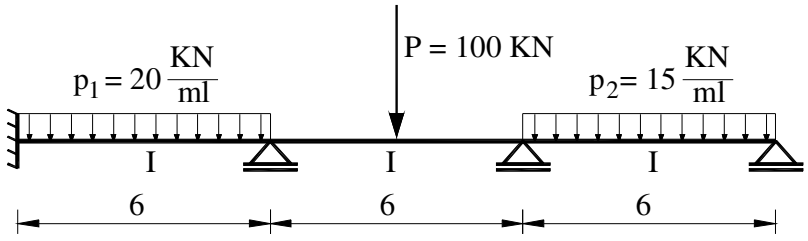
$$\theta_1 = -\frac{86{,}4}{6}\cdot\frac{1}{EI} = -14{,}4\cdot\frac{1}{EI}\ radiani$$

Fig. 8.6.f$_3$

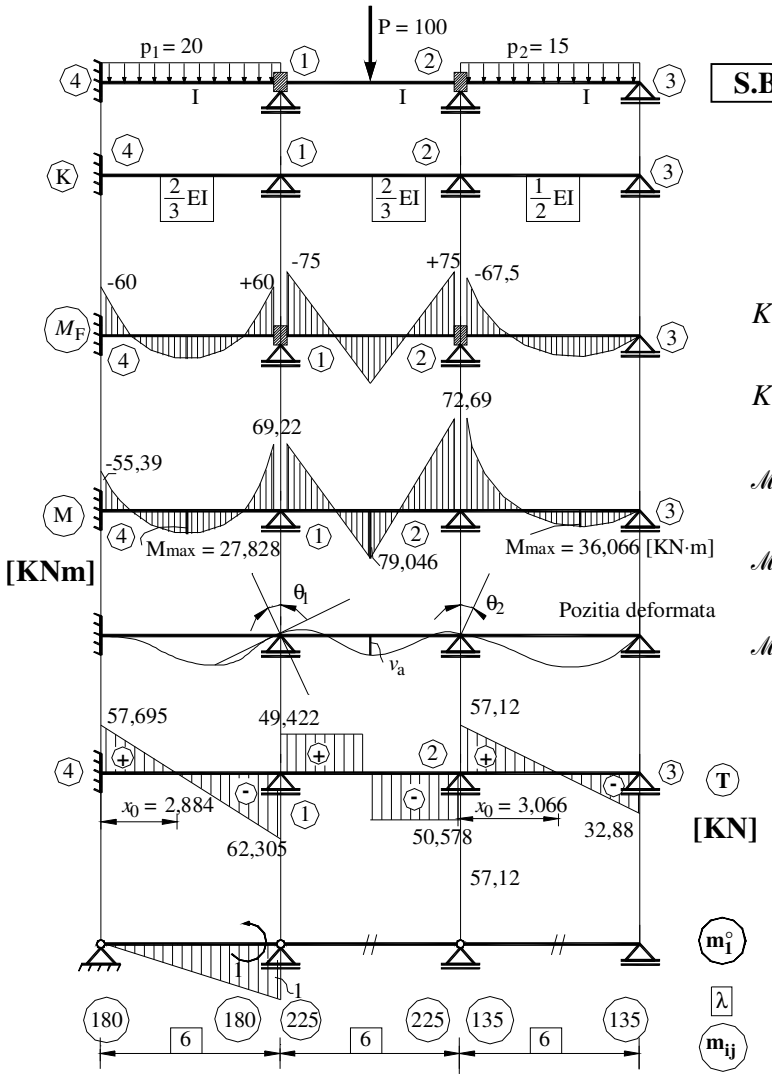
APLICAȚIA 4

Se cere calculul diagramei momentelor încovoietoare pentru grinda continuă din **fig.8.7,** utilizând procedeul iterativ CROSS. Cunoscând diagrama **M** se cere trasarea diagramei forțelor tăietoare **T** şi a poziției deformate a grinzii.

Fig. 8.7



Grinda continuă de mai sus poate fi considerată o structură cu noduri fixe, nodurile fiind secțiunile din dreptul reazemelor intermediare. Sistemul de bază este prezentat în **Fig. 8.7.a**:



$$K_{14} = \frac{4 \cdot EI}{6} = \frac{2}{3} EI = K_{12}$$

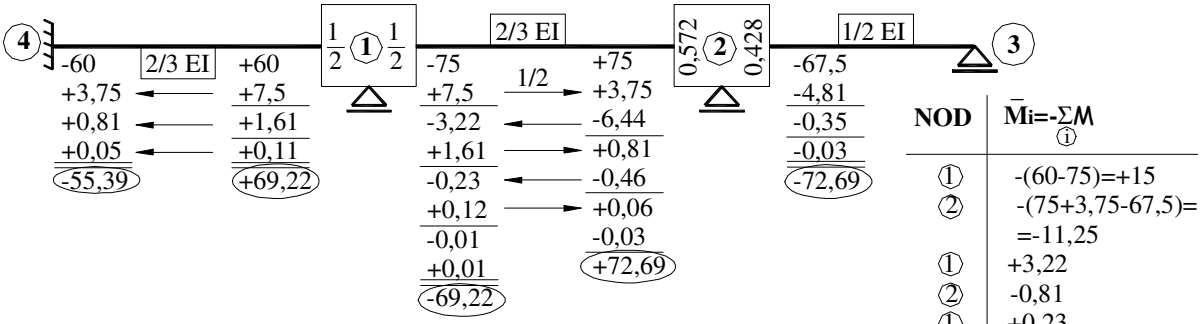
$$K_{23} = \frac{3 \cdot EI}{6} = \frac{1}{2} EI$$

$$\mathcal{M}_{41} = -\mathcal{M}_{14} = -\frac{20 \cdot 6^2}{12} = -60 KN \cdot m$$

$$\mathcal{M}_{12} = -\mathcal{M}_{21} = -\frac{100 \cdot 6}{8} = -75$$

$$\mathcal{M}_{23} = -\frac{15 \cdot 6^2}{8} = -67{,}7$$

Fig. 8.7.a



NOD	$\bar{M}_i = -\Sigma M_{(i)}$
①	-(60-75)=+15
②	-(75+3,75-67,5)= =-11,25
①	+3,22
②	-0,81
①	+0,23
②	-0,06
①	+0,01

Fig. 8.7.b

Se observă că nodurile sunt în echilibru şi transmiterile între noduri au fost corect efectuate.

Calculul forțelor tăietoare T (fig.8.7.c)

Bara 4-1

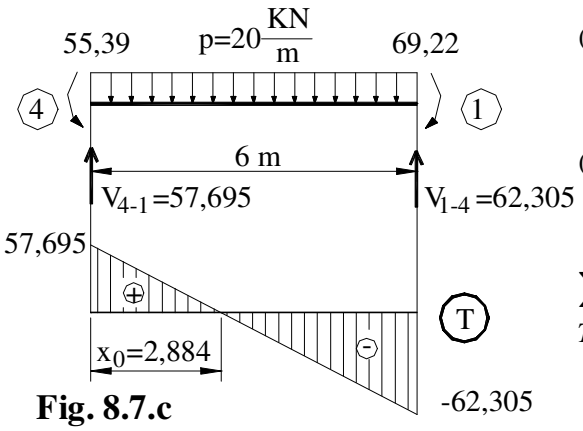


Fig. 8.7.c

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow V_{4-1} \cdot 6 - 55,39 + 69,22 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$V_{4-1} = \frac{346,17}{6} = 57,695KN$$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow -V_{1-4} \cdot 6 + 69,22 + 20 \cdot 6 \cdot 3 - 55,39 = 0$$

$$V_{1-4} = \frac{373,83}{6} = 62,305KN$$

$$\sum Y_i = 57,695 + 62,305 - 20 \cdot 6 = 0$$

$$T_{X_0} = 0 \Rightarrow 57,695 - 20 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2,884m$$

$$M_{\max} = 57,695 \cdot 2,884 - 55,39 - 20 \cdot 2,884^2 \cdot \frac{1}{2} = 27,828KN \cdot m$$

Bara 1-2

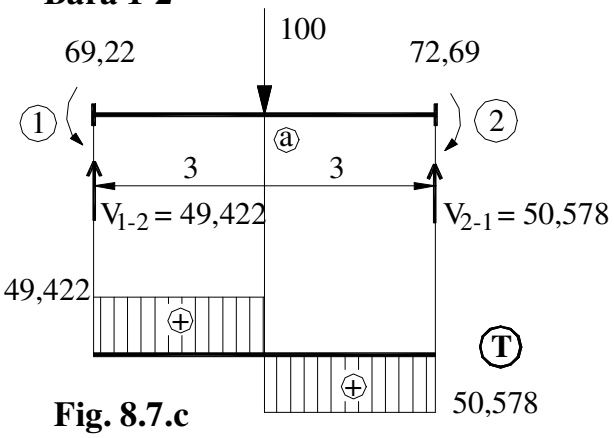


Fig. 8.7.c

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow V_{1-2} \cdot 6 - 69,22 - 100 \cdot 3 + 72,69 = 0$$

$$V_{1-2} = \frac{296,53}{6} = 49,522KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{2-1} \cdot 6 + 72,69 + 100 \cdot 3 - 69,22 = 0$$

$$V_{2-1} = \frac{303,47}{6} = 50,578KN$$

$$\sum Y_i = 49,422 + 50,578 - 100 = 0$$

$$M_A = 49,422 \cdot 3 - 69,22 = 79,046KN \cdot m$$

Bara 2-3

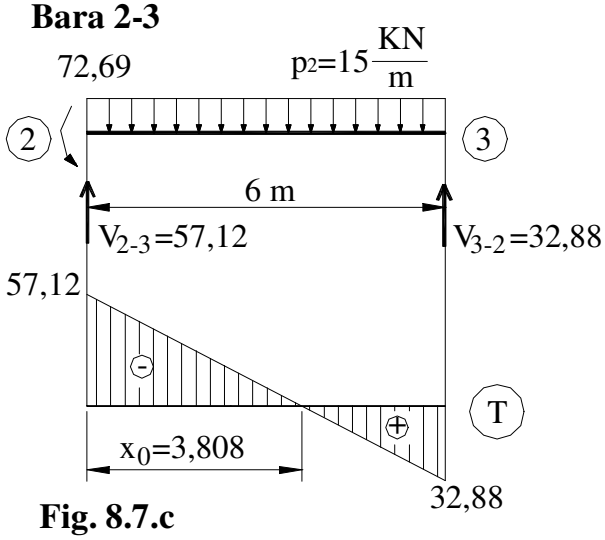


Fig. 8.7.c

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow V_{2-3} \cdot 6 - 72,69 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$V_{2-3} = \frac{342,69}{6} = 57,12[KN]$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_{3-2} \cdot 6 + 15 \cdot 6 \cdot 3 - 72,69 = 0$$

$$V_{3-2} = \frac{197,31}{6} = 32,88[KN]$$

$$T_{X_0} = 0 = 57,12 - 15 \cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 3,808$$

$$M_{\max} = 57,12 \cdot 3,808 - 72,69 - 15 \cdot \frac{3,808^2}{2} = 36,066[KNm]$$

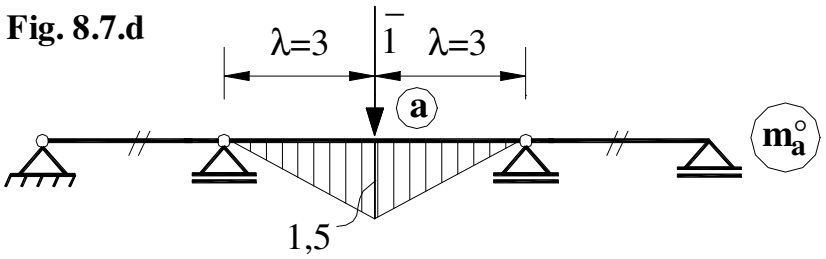
Calculul rotirilor nodurilor θ_1 şi θ_2 şi a deplasaării verticale v_a (Fig.8.7.d)

Se va utiliza formula Maxwell-Mohr:

$$\theta_1 = \int M \cdot m_1^0 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\theta_1 = -2 \cdot 6 \cdot 55,39 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 69,22 \cdot 1 + 6 \cdot 180 \cdot 1 = -415,32$$

$$\theta_1 = -\frac{415,32}{6EI} = -69,22 \frac{1}{EI} rad$$

Fig. 8.7.d



$$v_a = \int M m_a^0 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EIv_a = -3 \cdot 69,22 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 \cdot 79,046 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 \cdot 79,046 \cdot 1,5 - 3 \cdot 72,69 \cdot 1,5 = 784,233$$

$$v_a = \frac{784,233}{6EI} = 130,705 \cdot \frac{1}{EI}[m]$$

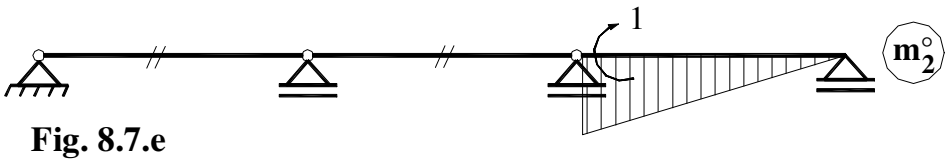


Fig. 8.7.e

$$\theta_2 = \int M \cdot m_2^0 \frac{dx}{EI} \Rightarrow 6EI\theta_2 = -2 \cdot 6 \cdot 57,12 \cdot 1 + 6 \cdot 135 \cdot 1 = 124,56$$

$$\theta_2 = \frac{124,56}{6EI} = 20,76 \cdot \frac{1}{EI}[rad]$$

APLICAȚIA 5

Pentru structura din **Fig. 8.8** se cere determinarea diagramei **M**, utilizând procedeul iterativ CROSS. Cunoscând diagrama **M** se cere calculul şi trasarea diagramelor **T**,**N** şi a poziției deformate.

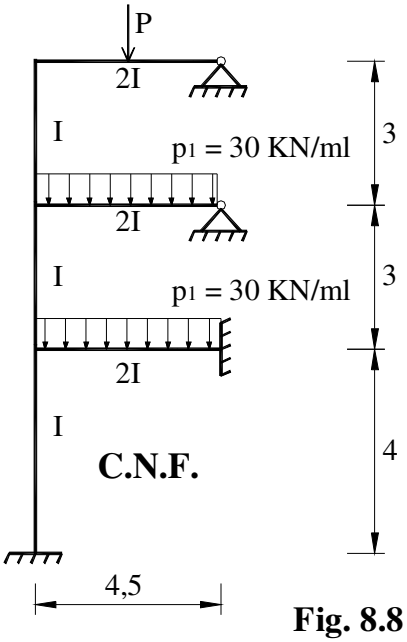
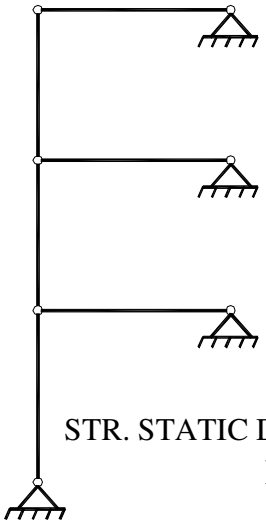


Fig. 8.8

Sistemul articulat (Fig.8.8.a)



STR. STATIC DET.

Fig. 8.8.a

$$N_{GLC} = |l + r - 3c| = |5 \cdot 2 + 8 - 3 \cdot 6| = 0 .$$

Rezultă că structura inițială este un cadru cu noduri fixe

Sistemul de bază şi **momentele de încastrare perfectă** sunt prezentate în **fig.8.8.b.**

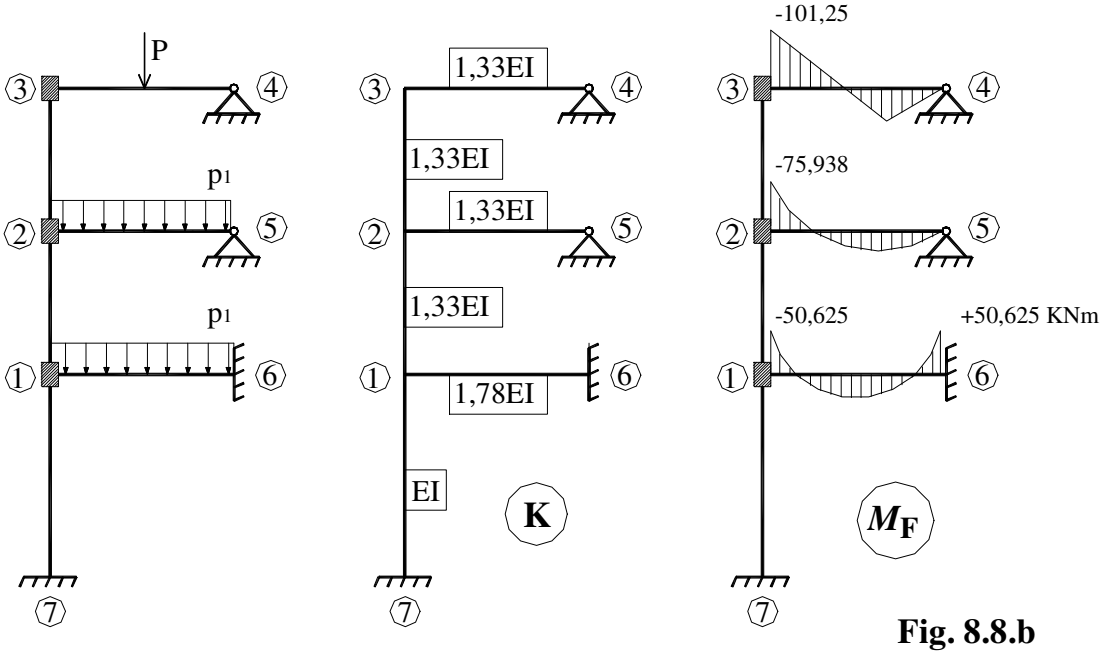


Fig. 8.8.b

$$k_{17} = \frac{4 \cdot EI}{4} = EI$$

$$k_{12} = k_{23} = \frac{4 \cdot EI}{3} = 1{,}33EI$$

$$k_{16} = \frac{4 \cdot 2EI}{4{,}5} = 1{,}78EI$$

$$k_{25} = k_{34} = \frac{3 \cdot 2EI}{4{,}3} = 1{,}33EI$$

$$M_{1\text{-}6} = -M_{6\text{-}1} = -\frac{30 \cdot 4{,}5^2}{12} = -50{,}625 \approx -50{,}63$$

$$M_{25} = -\frac{30 \cdot 4{,}5^2}{8} = -75{,}938 \approx -75{,}94$$

$$M_{34} = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{3 \cdot 120 \cdot 4{,}5}{16} = -101{,}25$$

Schema de iterație (Fig.8.8.c)

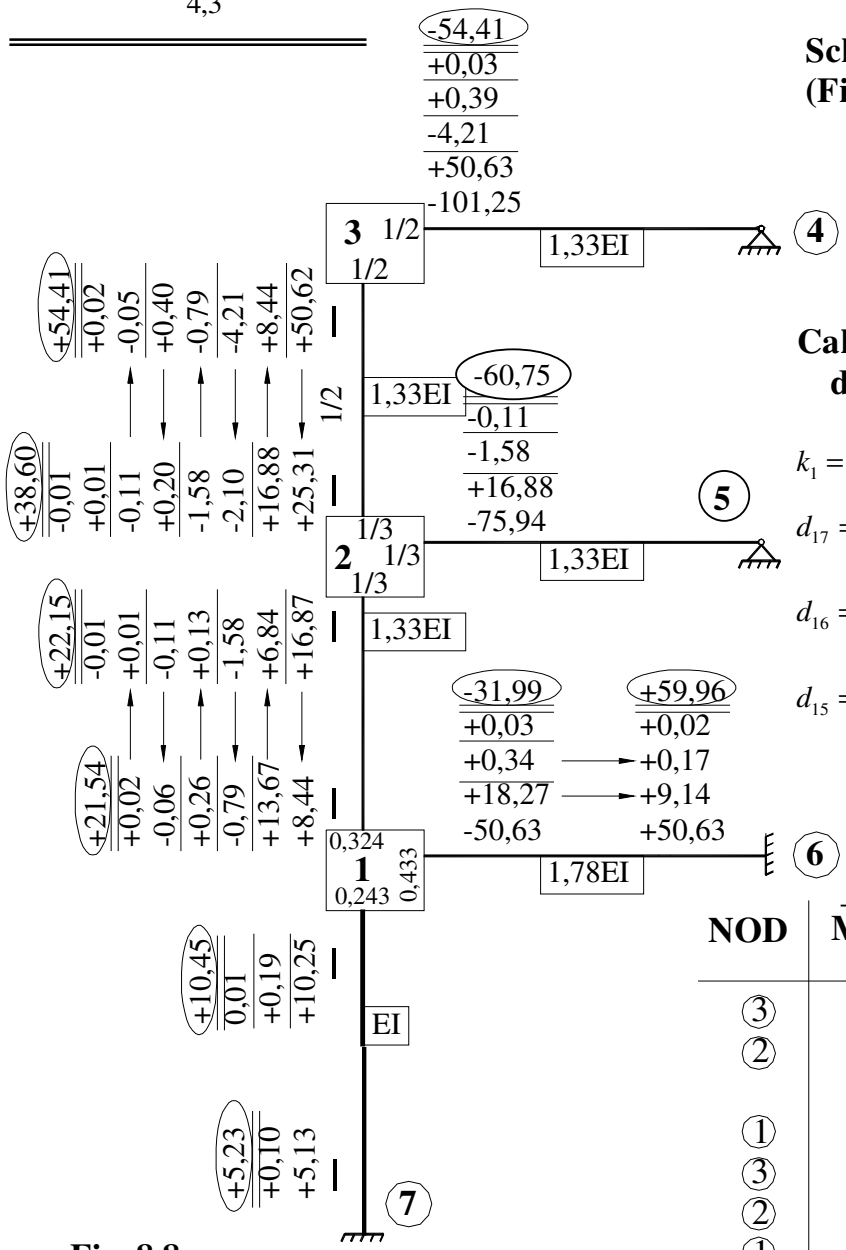


Fig. 8.8.c

Calculul coeficienților de distribuție d_{ij} NOD 1

$$k_1 = (1+1{,}78+1{,}33)EI = 4{,}11EI$$

$$d_{17} = \frac{EI}{4{,}11EI} = 0{,}243$$

$$d_{16} = \frac{1{,}78EI}{4{,}11EI} = 0{,}433$$

$$d_{15} = \frac{1{,}33EI}{4{,}11EI} = 0{,}324$$

NOD	$\bar{M}_i = -\sum_{(i)} M_{ij}$
③	+101,25
②	-(25,31-75,94)= =+50,63
①	-(8,44-50,63)=42,19
③	-8,42
②	-(6,84-2,10)=-4,74
①	+0,79
③	+0,79
②	-(0,20+0,13)=-0,33
①	+0,06
③	+0,05
②	-0,02

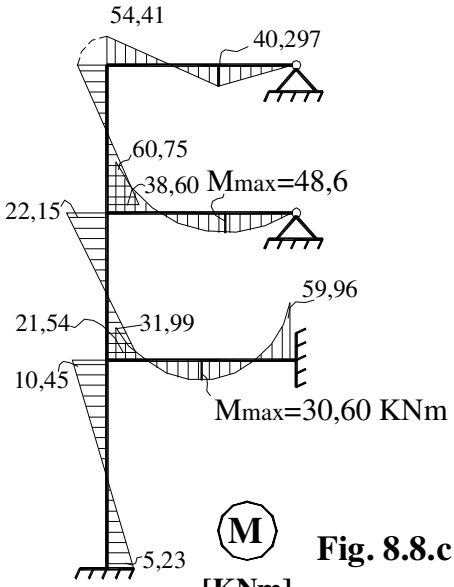


Fig. 8.8.c

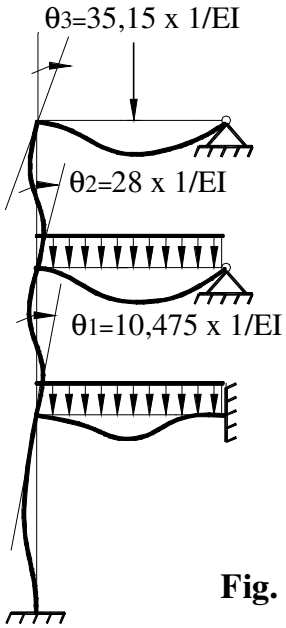


Fig. 8.8.f

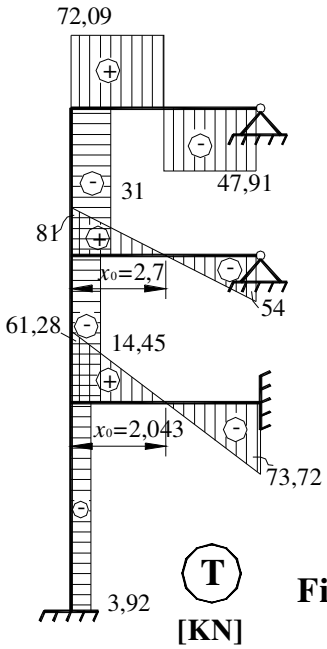


Fig. 8.8.d

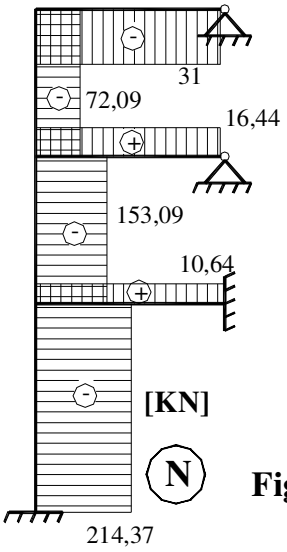


Fig. 8.8.e

Bara 1-7

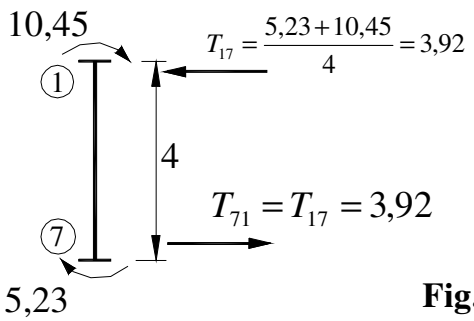
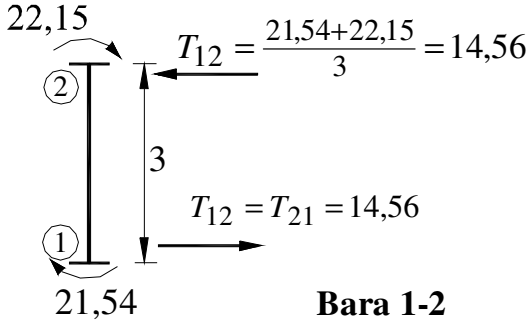


Fig. 8.8.d$_1$



Bara 1-2

Bara 2-3

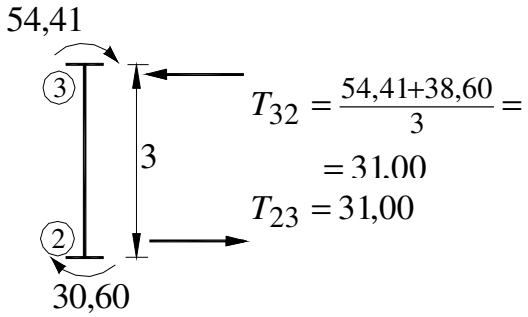


Fig. 8.8.d$_1$

Bara 1-6

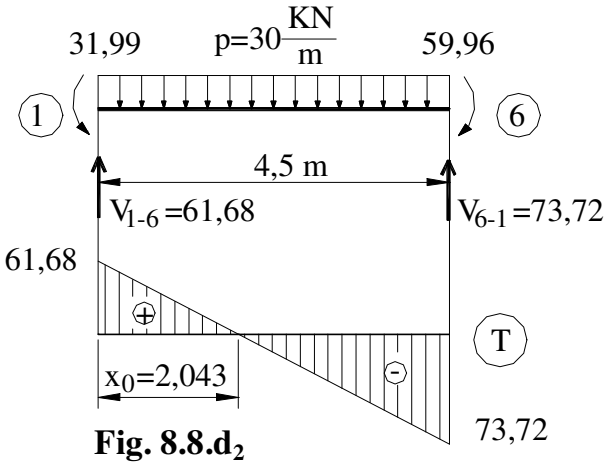


Fig. 8.8.d$_2$

$(\sum M)_6 = 0 \Rightarrow V_{1-6} \cdot 4,5 - 31,99 + 59,96 - 30 \cdot 4,5 \cdot \frac{4,5}{2} = 0$

$V_{1-6} = \frac{275,78}{4,5} = 61,28KN$

$(\sum M)_1 = 0 \Rightarrow -V_{6-1} \cdot 4,5 + 59,96 + 30 \cdot \frac{4,5^2}{2} - 31,99 = 0$

$V_{6-1} = \frac{331,72}{4,5} = 73,72KN$

$T_{X_0} = 0 \Rightarrow 61,28 - 30 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2,043m$

$M_{\max} = 61,28 \cdot 2,043 - 31,99 - 30 \cdot \frac{2,043^2}{2} = 30,60[KNm]$

Bara 2-5

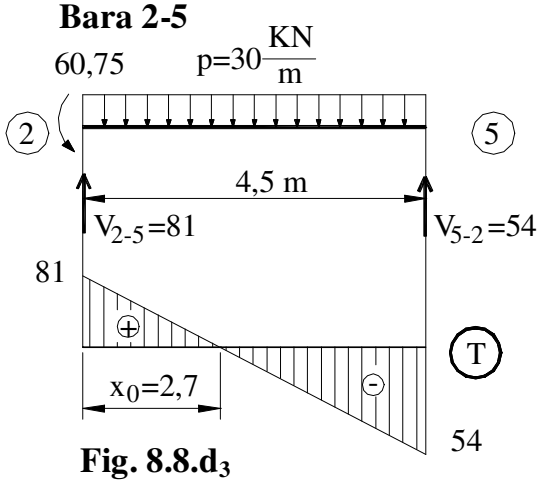


Fig. 8.8.d$_3$

$(\sum M)_5 = 0 \Rightarrow V_{2-5} \cdot 4,5 - 60,75 - 30 \cdot 4,5 \cdot \frac{4,5}{2} = 0$

$V_{2-5} = \frac{364,5}{4,5} = 81[KN]$

$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_{5-2} \cdot 4,5 + 30 \cdot \frac{4,5^2}{2} - 60,75 = 0$

$V_{5-2} = \frac{243}{4,5} = 54[KN]$

$T_{X_0} = 0 \Rightarrow 81 - 30 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2,7m$

$M_{\max} = 81 \cdot 2,7 - 60,75 - 30 \cdot \frac{2,7^2}{2} = 48,6[KNm]$

Bara 3-4

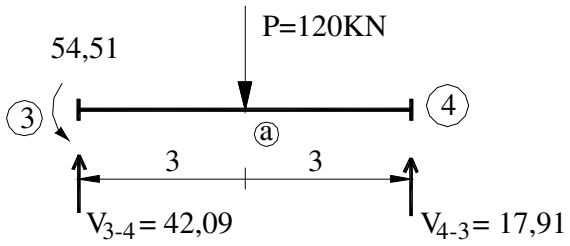


Fig. 8.8.d$_3$

$$(\sum M)_4 = 0 \Rightarrow V_{3-4} \cdot 4{,}5 - 54{,}41 - 120 \cdot 2{,}25 = 0$$

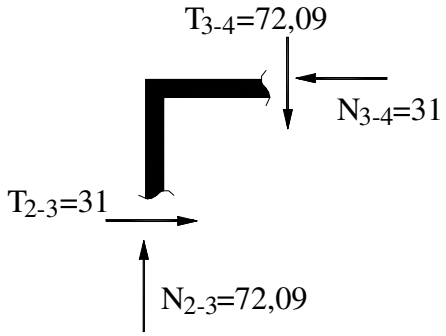
$$V_{3-4} = \frac{189{,}41}{4{,}5} = 72{,}09[KN]$$

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow -V_{4-3} \cdot 4{,}5 + 120 \cdot 2{,}25 - 54{,}41 = 0 .$$

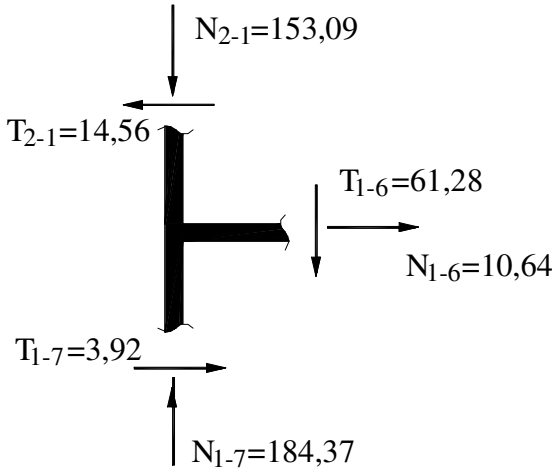
$$V_{4-3} = \frac{80{,}59}{4{,}5} = 47{,}91[KN]$$

$$M_a = -(-17{,}91 \cdot 2{,}25) = 40{,}297[KN \cdot m]$$

NOD 3



NOD 1

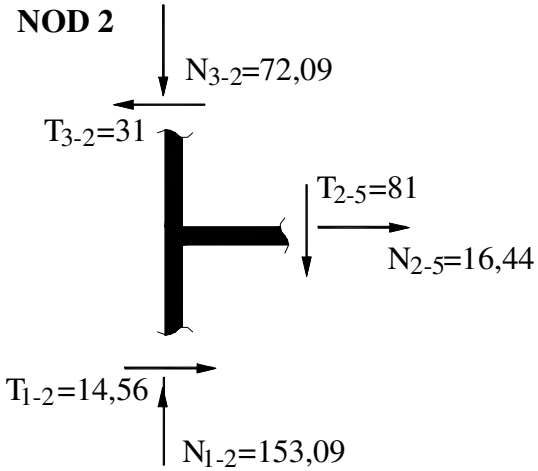


$$\sum Y_i = 0$$

$$N_{1-7} - 153{,}09 - 61{,}28 = 0$$

$$N_{1-7} = 214{,}37KN$$

NOD 2



$$\Sigma X_i = 0$$

$$-31 + 14{,}56 + N_{2-5} = 0$$

$$N_{2-5} = 16{,}44\ KN$$

$$\Sigma Y_i = 0$$

$$-72{,}09 - 81 + N_{1-2} = 0$$

$$N_{1-2} = 153{,}09\ KN$$

$$\sum X_i = 0$$

$$N_{1-6} + 3{,}92 - 14{,}56 = 0$$

$$N_{1-6} = 10{,}64KN$$

Fig. 8.8.e$_1$

Trasarea poziției deformate (Fig. 8.8.f_1, f_2, f_3)

Se vor calcula rotirile θ_1, θ_2, θ_3 utilizând formula Maxwell Mohr:

$$\theta_3 = \int m_3^0 \cdot M \frac{dx}{EI}; \qquad \theta_2 = \int m_2^0 \cdot M \frac{dx}{EI}; \qquad \theta_1 = \int m_1^0 \cdot M \frac{dx}{EI}$$

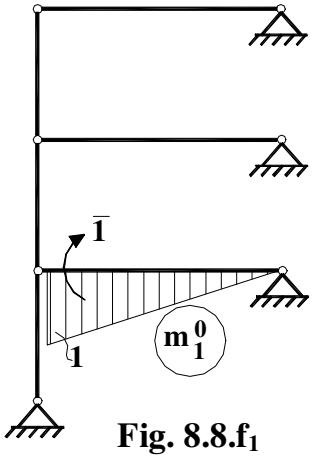


Fig. 8.8.f_1

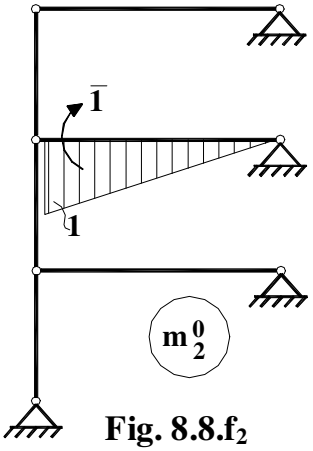


Fig. 8.8.f_2

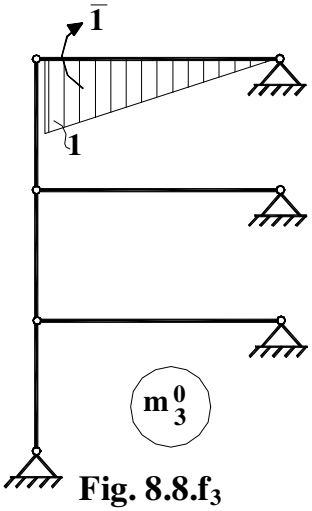
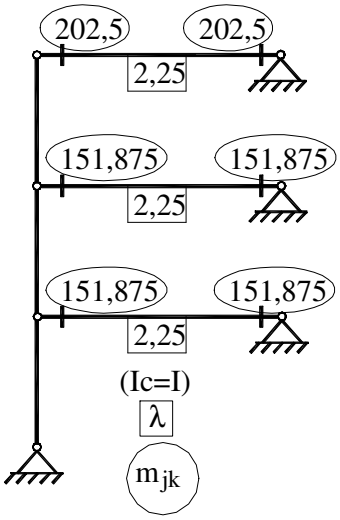


Fig. 8.8.f_3



$$m_{3-4} = \frac{3Pl}{8} = \frac{3 \cdot 120 \cdot 4,5}{8} = 202,5$$

$$m_{2-5} = m_{5-2} = \frac{pl^2}{4} = \frac{30 \cdot 4,5^2}{4} = 151,875$$

$$6EI\theta_3 = -2 \cdot 2,25 \cdot 54,41 \cdot 1 + 2,25 \cdot 202,5 \cdot 1 = 210,78 \qquad \theta_3 = 35,15 \frac{1}{EI}$$

$$6EI\theta_2 = -2 \cdot 2,25 \cdot 38,60 \cdot 1 + 2,25 \cdot 151,875 \cdot 1 = 168,018 \qquad \theta_2 = 28 \frac{1}{EI}$$

$$6EI\theta_1 = -2 \cdot 2,25 \cdot 31,99 \cdot 1 - 2,25 \cdot 59,96 \cdot 1 + 2,25 \cdot 151,875 \cdot 1 = 362,854 \qquad \theta_1 = 10,475 \frac{1}{EI}$$

REZOLVAREA CADRELOR CU NODURI DEPLASABILE PRIN PROCEDEUL DE OPERARE ÎN DOUĂ ETAPE

În procedeul de operare în două etape sistemul de bază pe care se face rezolvarea structurii este cadrul cu noduri fixe, obținut prin blocarea gradelor de libertate elastică ale structurii. În etapa a-I-a se rezolvă cadrul cu noduri fixe (sistemul de bază) încărcat cu forțele exterioare şi cu necunoscutele translații de nod, egale cu unitatea, folosind procedeul distribuției şi transmiterii momentelor (CROSS). În etapa a doua se determină valorile efective ale necunoscutelor translații de nod şi diagramele de eforturi **M,T,N** şi poziția deformată a structurii.

APLICAȚIA 9

Se propune rezolvarea cadrului cu noduri deplasabile din **fig. 8.9** utilizând procedeul de operare în două etape pentru trei ipoteze de încărcare:

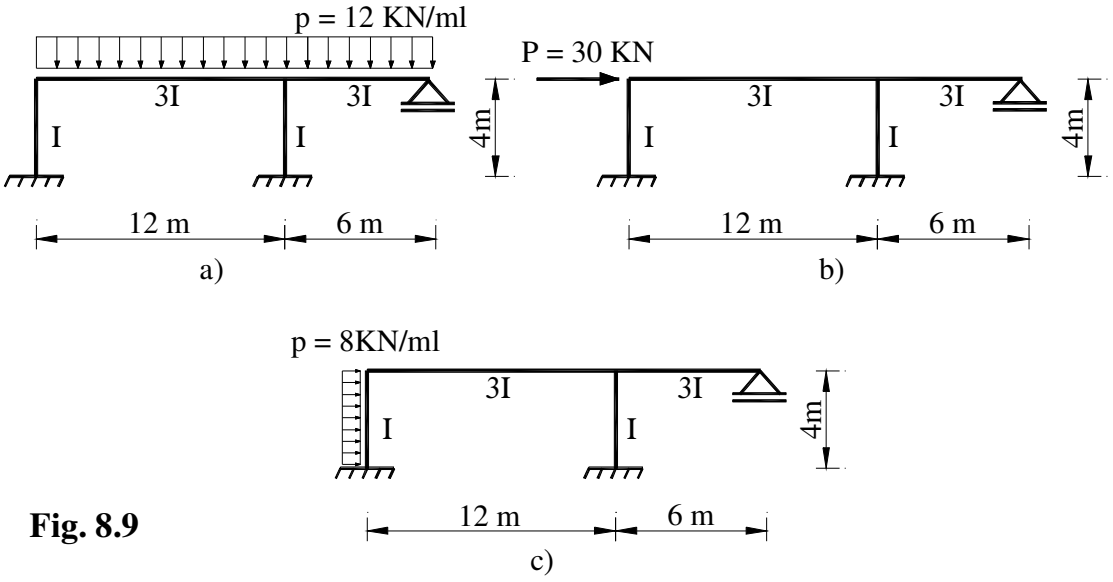


Fig. 8.9

Ipoteza a) de încărcare a structurii (fig. 8.9.a)

Se observă că structura are două noduri rigide, 1 şi 2. Studiul ei se va face apelând la sistemul articulat corespunzător structurii (fig. 8.9.a_1).

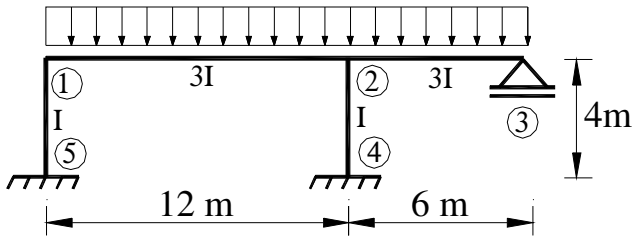


Fig. 8.9.a

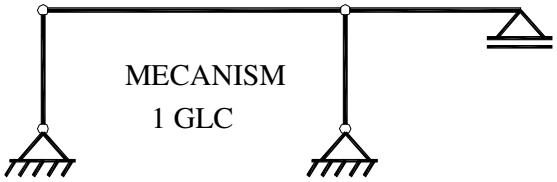


Fig. 8.9.a$_1$

$$N_{GLC} = |l + r - 3c| = |3 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 4| = |-1|$$

Sistemul articulat fiind un mecanism cu un grad de libertate cinematică, rezultă că structura reală este un cadru cu noduri deplasabile care are un grad de libertate elastică.

$$N_{GLE} = N_{GLC} = 1$$

OBSERVAȚIE:

*Se poate vedea şi prin observare directă că nodurile rigide **1** şi **2** se pot translata pe direcţia orizontală, deplasare permisă de reazemul simplu din secţiunea **3**.*

Procedeul de operare în două etape. Etapa I

Sistemul de bază folosit în etapa I este cadrul cu noduri fixe obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor structurii. Blocarea gradului de libertate se face cu ajutorul unui pendul orizontal introdus în secțiunea 3, care devine astfel punct fix **(fig. 8.9.a$_2$)**.

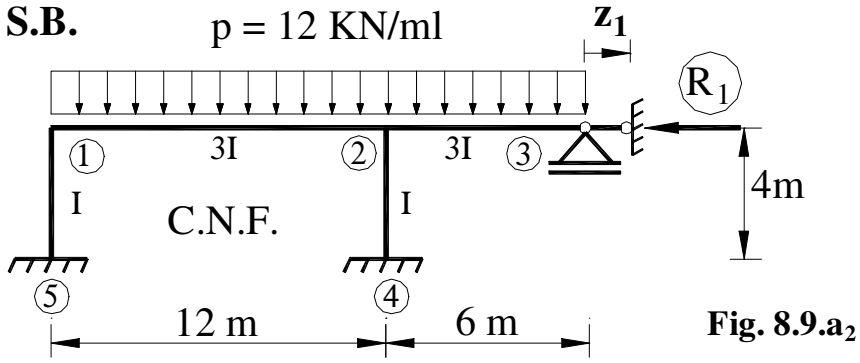


Fig. 8.9.a$_2$

Pe sistemul de bază (C.N.F.) acționează
- → Forțele exterioare: $\mathbf{M_F}$
- → Necunoscuta translație $Z_1=1$: $\mathbf{m_1}$

Rezolvarea sistemului de bază (C.N.F.)

Acțiunea forțelor exterioare: M_F

Pentru determinarea diagramei de moment $\mathbf{M_F}$ produsă de forțele exterioare pe sistemul de bază, trebuie să se calculeze momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ care apoi sunt iterate (procedeul CROSS) obținându-se diagrama căutată. Procedeul iterativ cere cunoașterea rigidităților la rotire de nod *K*, iar obținerea diagramei $\mathbf{m_1}$ produsă de acțiunea necunoscutei $\mathbf{Z_1=1}$ pe sistemul de bază cere cunoșterea rigidităților la rotire de bară $\overline{K}$ **(fig. 8.9.a$_3$).**

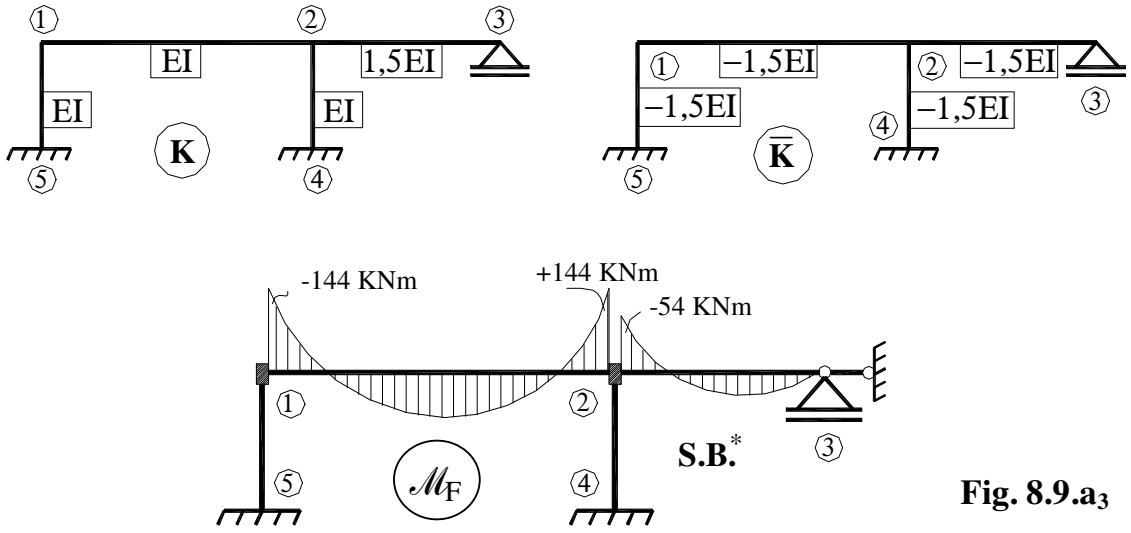


Fig. 8.9.a$_3$

Calculul rigidităților la rotire de nod K (fig. 8.9.a$_3$)

$$K_{12}=\frac{4\cdot 3EI}{12}=EI \qquad K_{15}=K_{24}=\frac{4\cdot EI}{4}=EI \qquad K_{23}=\frac{3\cdot 3EI}{6}=1{,}5EI$$

Calculul rigidităților la rotire de bară $\overline{K}$ (fig. . 8.9.a$_3$)

$$\overline{K}_{12}=-\frac{6\cdot 3EI}{12}=-1{,}5EI \quad \overline{K}_{15}=\overline{K}_{24}=-\frac{6\cdot EI}{4}=-1{,}5EI \quad \overline{K}_{23}=-\frac{3\cdot 3EI}{6}=-1{,}5EI$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ (fig. 8.9.a$_3$)

Momentele de încastrare perfectă produse de forțele exterioare se calculează pe sistemul de bază al **C.N.F.** (sistemul de bază în etapa a-I-a), adică pe cadrul care are nodurile blocate la rotire **S.B*.** Momentele de încastrare perfectă apar numai pe barele care au forțe pe parcursul lor, adică barele **1-2** şi **2-3**:

$$\mathcal{M}_{12}=-\mathcal{M}_{23}=-\frac{pl^2}{12}=-\frac{12\cdot 12^2}{12}=-144 \text{ KN·m}$$

$$\mathcal{M}_{23}=-\frac{pl^2}{8}=-\frac{12\cdot 6^2}{8}=-54 \text{ KN·m}$$

Aplicarea procedeului iterativ al distribuției şi transmiterii momentelor (CROSS). Schema de iterație (fig. 8.9.a$_4$)

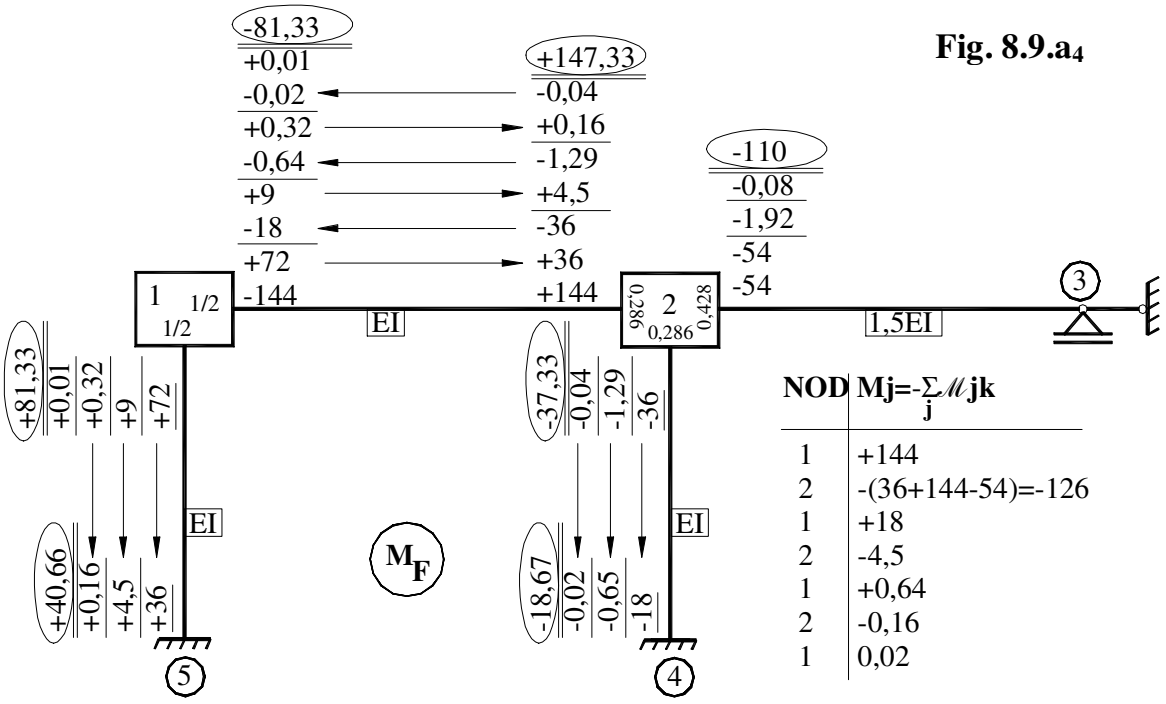


Fig. 8.9.a$_4$

NOD	Mj=-$\sum_j \mathcal{M}_{jk}$
1	+144
2	-(36+144-54)=-126
1	+18
2	-4,5
1	+0,64
2	-0,16
1	0,02

Calculul coeficienților de distribuție d_{jk}

NODUL 1

$$K_1 = EI + EI = 2EI \quad d_{12} = d_{15} = \frac{EI}{2EI} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \sum_1 d_{1K} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

NODUL 2

$$K_2 = EI + EI + 1{,}5EI = 3{,}5EI \quad d_{21} = d_{24} = \frac{EI}{3{,}5EI} = 0{,}286 \quad d_{23} = \frac{1{,}5EI}{3{,}5EI} = 0{,}428$$

$$\sum_2 d_{2K} = 0{,}286 + 0{,}286 + 0{,}428 = 1{,}000$$

Acțiunea necunoscutei Z_1=1 pe S.B : m_1

Calculul rotirilor de bară Ψ produse de translația de nod Z_1=1(fig. 8.9.a$_5$)

Se va utiliza sistemul articulat, mecanism cu un grad de libertate cinematică.

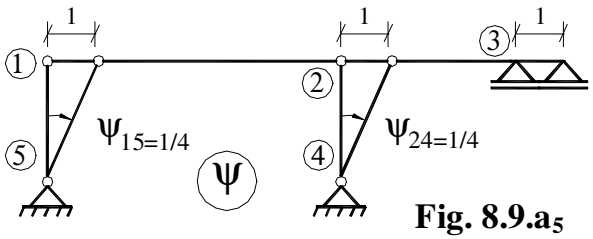


Fig. 8.9.a$_5$

Se va da o deplasare orizontală egală cu unitatea nodurilor **1** şi **2**, respectiv reazemului simplu vertical **3**. Se observă că barele **1-2**, **2-3** se translatează ($\psi_{12}=\psi_{23}=0$), iar stâlpii **1-5** şi **2-4** se rotesc. Considerând deplasarea infinit mică se poate accepta că tgψ≈ψ. Astfel se obțin rotirile de bară ca fiind:

$$\psi_{15}=+\frac{1}{4};\qquad \psi_{24}=+\frac{1}{4};\quad \psi_{12}=\psi_{23}=0.$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă produse de Z_1=1 pe SB: $\mathcal{M}_1$ (Fig. 8.9.a6)

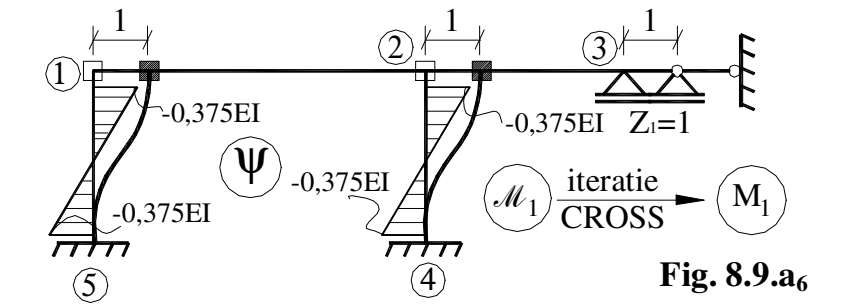


Fig. 8.9.a$_6$

OBSERVAȚIE:

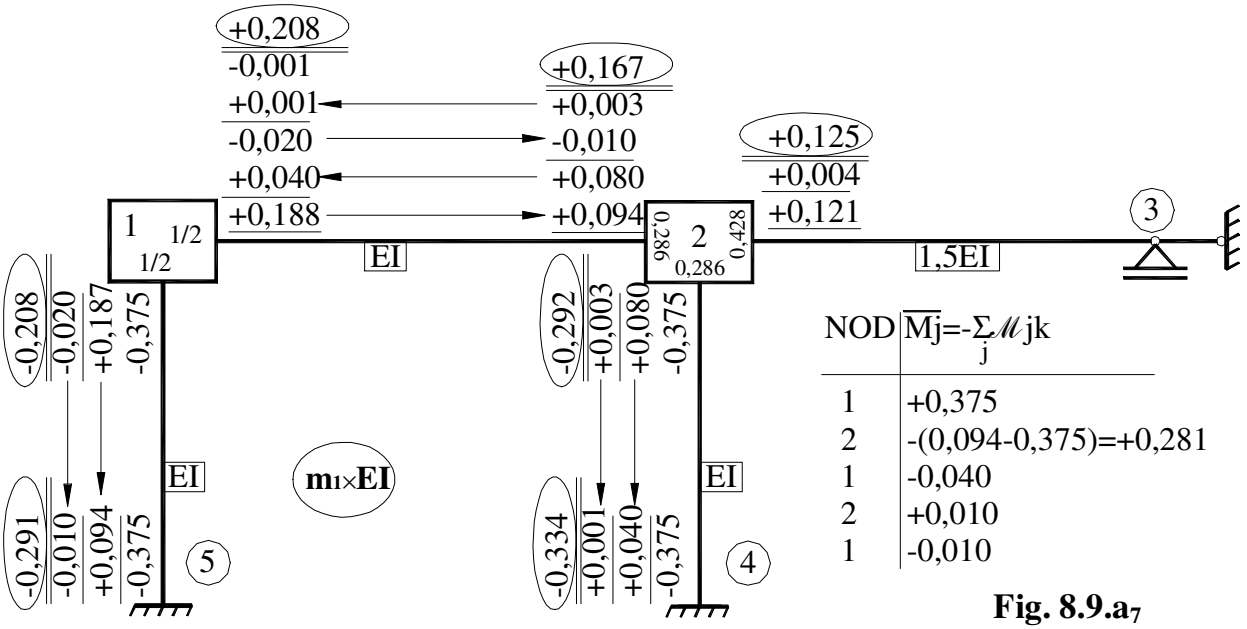
Poziția deformată a sistemului de bază cu nodurile blocate la rotire, este strâns corelată cu poziția deplasată a sistemului articulat. Momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_1$ se calculează utilizând rigiditățile la rotirile de nod $\overline{K}$.

$$\mathcal{M}_{15}=\mathcal{M}_{51}=\mathcal{M}_{24}=\mathcal{M}_{42}=\overline{K}_{15}\cdot\psi_{15}=(-1{,}5EI)\left(+\frac{1}{4}\right)=-0{,}375EI\ \ [KNm]$$

$\mathcal{M}_{12}=\mathcal{M}_{21}=\mathcal{M}_{23}=0$ ($\psi_{12}=\psi_{23}=0$).

Iterând momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_1$ se va obține diagrama $\mathbf{m_1}$, adică diagrama produsă de necunoscuta translație de nod $\mathbf{Z_1=1}$ pe sistemul de bază din etapa I **(Fig. 8.9.a$_7$)**

Schema de interație (fig. 8.9.a$_7$)



NOD	$\overline{Mj}=-\sum_j \mathcal{M}_{jk}$
1	+0,375
2	-(0,094-0,375)=+0,281
1	-0,040
2	+0,010
1	-0,010

Fig. 8.9.a$_7$

Se reprezintă momentele obținute pe sistemul de bază **(C.N.F.)** în etapa I în **fig. 8.9.a$_8$**:

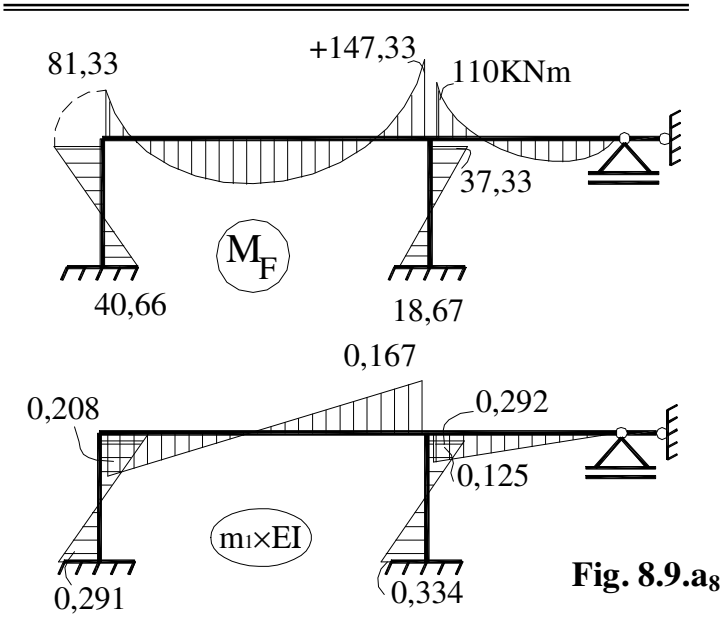


Fig. 8.9.a$_8$

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II^a

În etapa a doua există trei obiective:

1. Determinarea valorii necunoscutei Z_1, translație de nod. Sistemul de bază **(C.N.F.)** utilizat în etapa întâia a fost obținut blocând posibilitatea de

translație a nodurilor (blocând gradul de libertate elastică). În blocajul de translație al nodurilor **(fig. 8.9.a$_2$)** apare o forță orizontală $\mathbf{R_1}$. În structura reală nodurile se translatează liber, deci trebuie să se impună sistemului de bază condiția ca reacțiunea totală $\mathbf{R_1}$ să fie zero. Se obține astfel ecuația de condiție a metodei, care este o ecuație de echilibru static: $\mathbf{R_1=0.}$

Utilizând simultan principiul proporționalității şi principiul superpoziției ecuația de condiție devine:

$$R_1=r_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0 \qquad \text{unde,}$$

$\mathbf{r_{11}}$ – reprezintă reacțiunea forță orizontală din blocajul gradului de libertate elastică produsă de acțiunea necunoscutei $\mathbf{Z_1=1}$ pe sistemul de bază **(C.N.F.)**

$\mathbf{R_{1F}}$ – reprezintă reacțiunea forță orizontală din blocajul gradului de libertate elastică produsă de acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază **(C.N.F.)**

Calculul reacțiunii r_{11}, forță orizontală (fig. 8.9.a$_9$)

Se va exprima echilibrul riglei 1-2-3 ($\sum_{rigla} X_i = 0$) încărcată cu forțele tăietoare produse de momentele $\mathbf{m_1}$ pe stâlpii structurii. Pentru aceasta se izolează rigla din structură şi se calculează forțele tăietoare pe stâlpi.

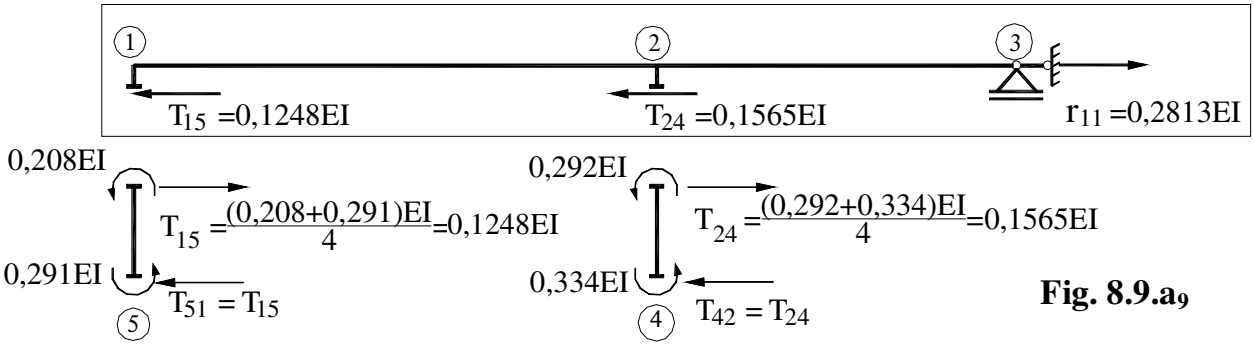


Fig. 8.9.a$_9$

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \qquad r_{11}\text{-}T_{15}\text{-}T_{24} = 0 \qquad r_{11}=0{,}2813\cdot \text{EI}\ [KNm]$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{r_{11}}$ acționează în sensul axei **0x** deci va avea conform convenției de semne semnul plus.

Calculul reacțiunii R_{1F}, forță orizontală (Fig. 8.9.a$_{10}$)

Reacțiunea forță orizontală $\mathbf{R_{1F}}$ este produsă de momentele $\mathbf{M_F}$ obținute pe sistemul de bază în etapa întâia şi de forțele orizontale direct aplicate pe rigla structurii dacă există. În ipoteza **a** de încărcare nu avem decât forțe verticale pe structură. Se va izola rigla structurii secționând stâlpii imediat sub riglă şi se calculează forțele tăietoare pe stâlpi, produse de momentele $\mathbf{M_F}$.

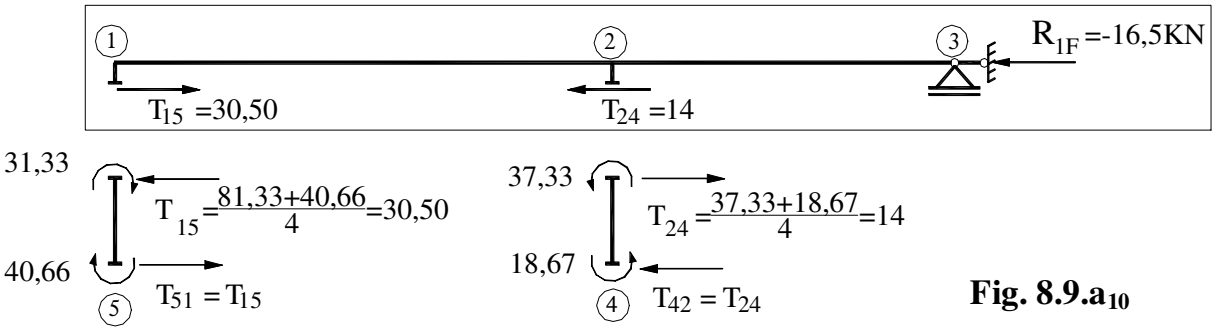


Fig. 8.9.a$_{10}$

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow -R_{1F}+T_{15}-T_{24}=0 \Rightarrow -R_{1F}+30{,}50-14=0 \Rightarrow R_{1F}=16{,}5\ KN$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{R_{1F}}$ acționează în sens contrar axei **0x**, deci conform convenției de semne va avea valoare negativă. Rezolvând în continuare ecuația de condiție se obține valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$:

$$R_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0 \quad 0{,}2813\cdot EI\cdot Z_1-16{,}5=0 \quad Z_1=+58{,}656\cdot\frac{1}{EI}$$

Se observăm că necunoscuta $\mathbf{Z_1}$ a rezultat pozitivă, ceea ce însemnă că translația nodurilor are loc de la stânga spre dreapta (vezi **fig. 8.9.a$_2$).**

2. Calculul şi verificarea diagramei de moment finale M^{FINAL} (fig.8.9.a$_{11}$).

Utilizând principiul superpoziției şi principiul proporționalității se obține:

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot Z_1$$

Calculele se vor face pe schema structurii **(fig.8.9.a$_{11}$)**

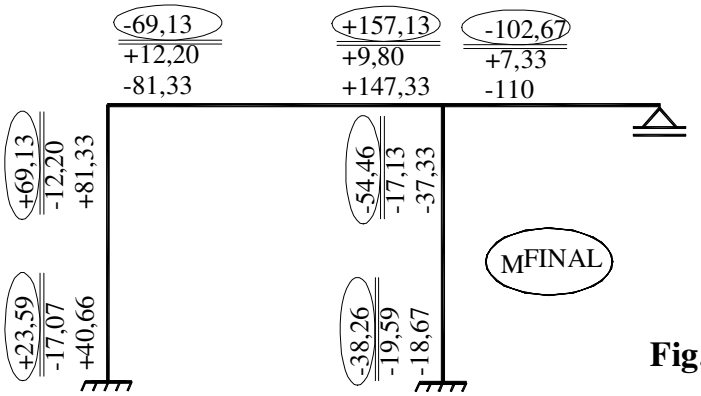


Fig. 8.9.a$_{11}$

Verificarea diagramei $\mathbf{M}^{\mathbf{FINAL}}$ se face exprimând echilibrul riglei izolate din structură **(fig.8.9.a$_{12}$)**

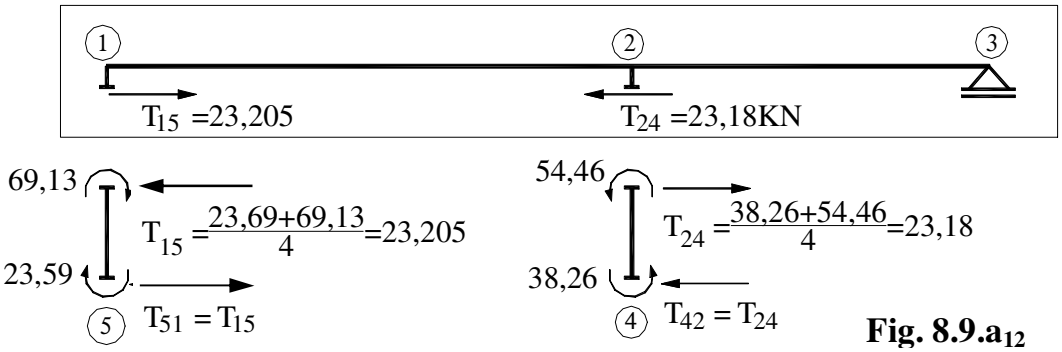


Fig. 8.9.a$_{12}$

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} +23{,}205\text{-}23{,}18=0{,}025 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{|23{,}205-23{,}18|}{|23{,}205|}\cdot 100\% = 0{,}108\% \\ \varepsilon < 1\% \qquad \text{(limita admisă)} \end{cases}$$

3. Se constată că momentele $\mathbf{M}^{\mathbf{FINAL}}$ respectă limita de eroare admisă ($\varepsilon \le 1\%$) asfel că se poate trece la **trasarea diagramei şi calculul momentelor maxime (fig.8.9.a$_{13}$).**

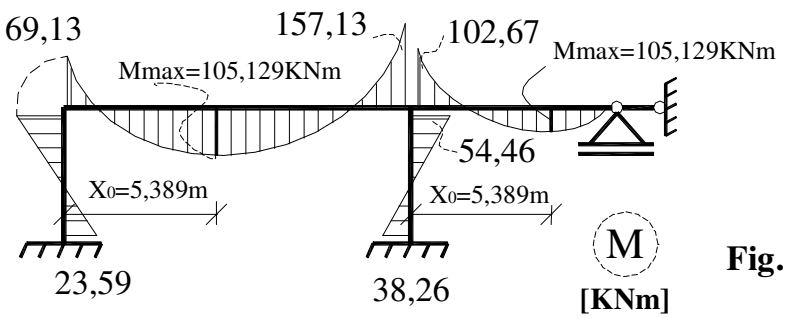


Fig. 8.9.a$_{13}$

Calculul momentului maxim pe bara 1-2 (fig.8.9.a$_{14}$)

Bara 1-2

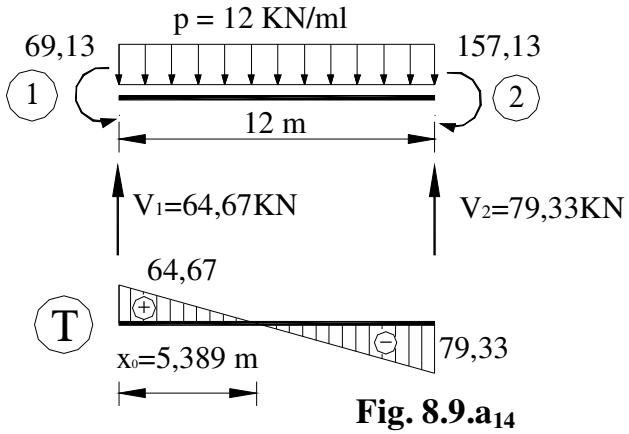


Fig. 8.9.a$_{14}$

$\left(\sum M\right)_2 = 0$ $V_1 \cdot 12\text{-}69{,}13\text{+}157{,}13\text{-}12 \cdot 12 \cdot 6\text{=}0$

$\boldsymbol{V_1 = 64{,}67\ KN}$

$\left(\sum M\right)_1 = 0$ $-V_2 \cdot 12\text{+}157{,}13\text{+}12 \cdot 12 \cdot 6\text{-}69{,}13\text{=}0$

$\boldsymbol{V_2 = 79{,}33\ KN}$

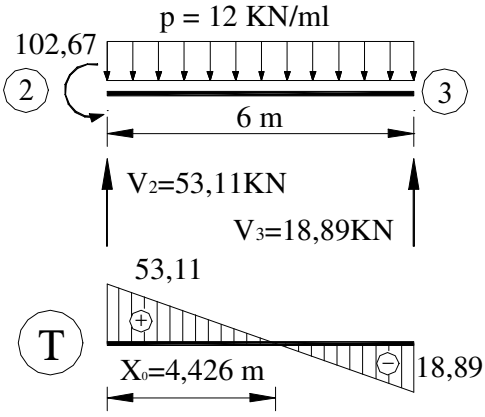
$T_{X_o}=0$ $64{,}67\text{-}12 \cdot x_0\text{=}0$ $x_0 = 5{,}389\ m$

$$M_{\max} = 64{,}67 \cdot 5{,}389 - 69{,}13 - 12 \cdot 5{,}389 \cdot \frac{5{,}389}{2} =$$

$$= 105{,}129\,KNm$$

Calculul momentului maxim pe bara 2-3 (fig.8.9.a$_{15}$)

Bara 2-3 **Fig. 8.9.a$_{15}$**



$\left(\sum M\right)_3 = 0$ $V_2 \cdot 6\text{-}102{,}67\text{-}12 \cdot 6 \cdot 3\text{=}0$

$\boldsymbol{V_2 = 53{,}11\ KN}$

$\left(\sum M\right)_2 = 0$ $-V_3 \cdot 6\text{+}12 \cdot 6 \cdot 3\text{-}102{,}67\text{=}0$

$\boldsymbol{V_3 = 18{,}89\ KN}$

$T_{X_o}=0$ $53{,}11\text{-}12 \cdot x_0\text{=}0$ $x_0 = 4{,}426\ m$

$$M_{\max} = 53{,}11 \cdot 4{,}426 - 102{,}67 - 12 \cdot 4{,}426 \cdot \frac{4{,}426}{2}$$

$$= 14{,}858\,KNm$$

Calculul şi trasarea diagramei T (fig.8.9.a$_{16}$)

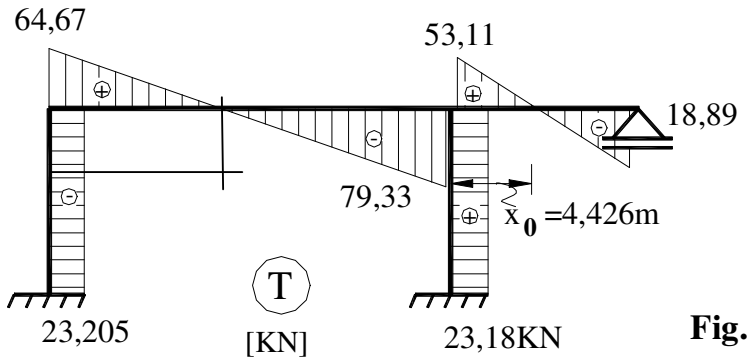


Fig. 8.9.a$_{16}$

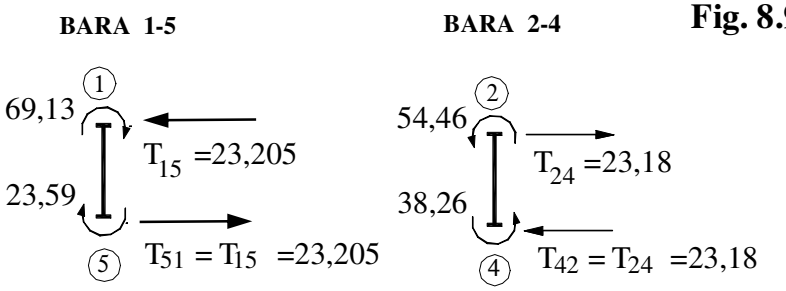


Fig. 8.9.a$_{16}$

Se observă că diagrama forțelor tăietoare pe barele **1-2** şi **2-3** este deja cunoscută din calculul momentului maxim pe aceste bare. Forțele tăietoare pe stâlpi sunt de asemenea cunoscute din calculele de verificare ale momentului final **(fig.8.9.a$_{12}$)**

Calculul şi trasarea diagramei N (fig.8.9.a$_{17}$)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru static exprimate pentru fiecare nod din structură.

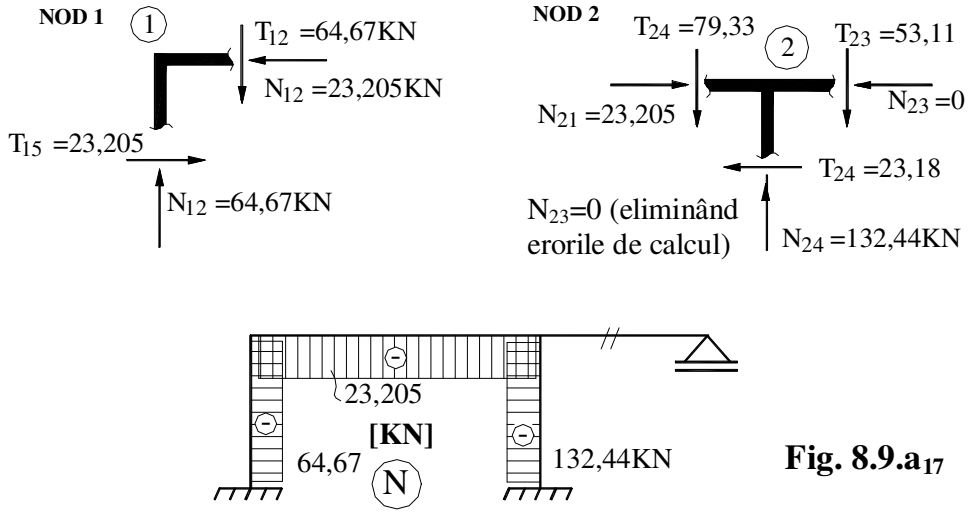


Fig. 8.9.a$_{17}$

Trasarea poziției deformate a structurii (fig. 8,9,a$_{18}$)

Se va utiliza valoarea translației nodurilor cunoscută din rezolvarea structurii $Z_1=58{,}656\cdot\frac{1}{EI}$ şi diagrama de moment $\mathbf{M}^{\mathbf{FINAL}}$ care indică poziția fibrelor întinse pe fiecare bară. Se va ține cont de faptul că nodurile **1** şi **2** se şi rotesc, chiar dacă aceste rotiri nu au fost calculate **(θ_1 şi θ_2)** .

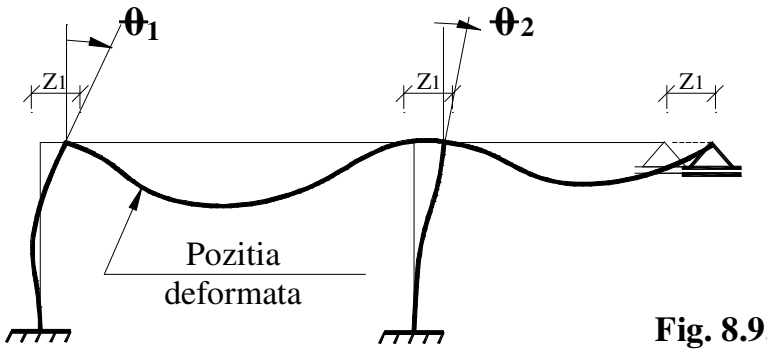


Fig. 8.9.a$_{18}$

Ipoteza b de încărcare a structurii (8.9.b)

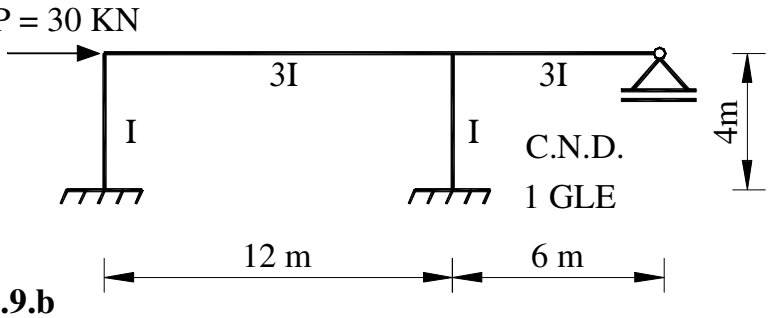


Fig. 8.9.b

Se observă că structura este încărcată cu o singură forță exterioară P=30 KN, care acționează pe direcția riglei orizontale. Deoarece caracteristicile geometrice ale structurii sunt aceleaşi, se vor putea prelua direct multe din rezultatele obținute la rezolvarea ipotezei **a** de încărcare. Se reaminteşte că structura dată este un cadru cu noduri deplasabile care are un singur grad de libertate elastică. Rezolvarea cadrului se face utilizând procedeul de operare în două etape, expus pe larg anterior.

Procedeul de operare în două etape. Etapa I

Sistemul de bază folosit este cadrul cu noduri fixe obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor (cu un pendul orizontal).

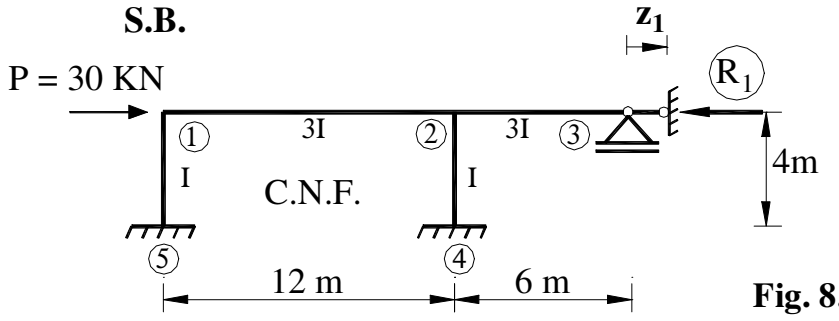


Fig. 8.9.b$_1$

Pe sistemul de bază **(C.N.F.)** acționează simultan forța exterioară **P** şi necunoscuta translație de nod $\mathbf{Z_1}$.

Acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază $\Rightarrow \mathbf{M_F}$

Pentru determinarea diagramei de moment $\mathbf{M_F}$, produsă de forțele exterioare pe sistemul de bază trebuie să se calculeze mai întâi momentele de încastrare perfectă $\mathbf{\mathscr{M}_F}$, care apoi se iterează obținând diagrama căutată. Se va apela la sistemul de bază al cadrului cu noduri fixe, adică la cadrul cu nodurile blocate la rotire **(S.B*).**

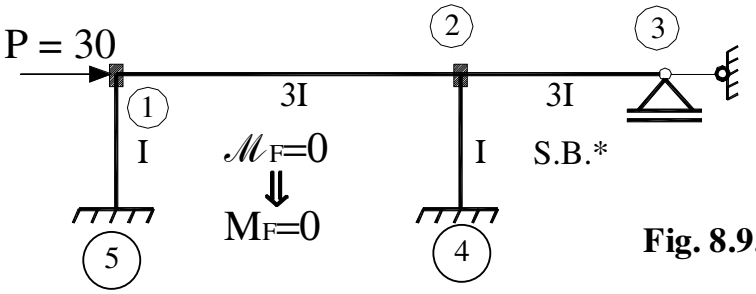


Fig. 8.9.b$_2$

Se observă **(fig. 8.9.b$_2$)** că în situația particulară de încărcare exterioară nu apar momente de încastrare perfectă pe nici o bară (forța exterioară **P** acționează chiar în nodul **1**). *Rezultă că diagrama $\mathbf{M_F}$ va fi identic nulă.*

Acțiunea necunoscutei translație de nod Z_1=1 pe sistemul de bază $\Rightarrow$ $\mathbf{m_1}$ (fig. 8.9.b$_3$)

Se va prelua diagrama $\mathbf{m_1}$ din rezolvarea anterioară a cadrului în situația "**a**" de încărcare.

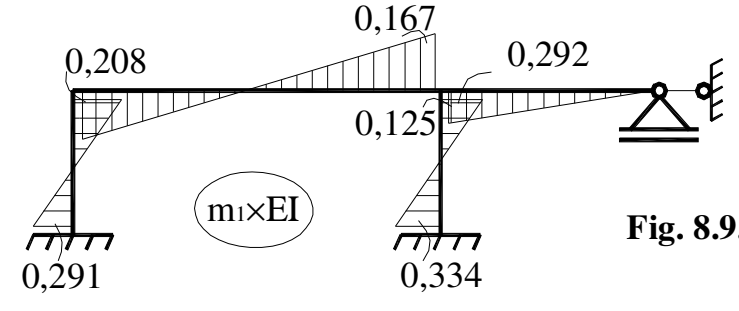


Fig. 8.9.b$_3$

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II-a

După cum se ştie în etapa a doua se urmăresc trei obiective.

1. **Determinarea valorii necunoscutei Z_1, translaţie de nod.**

Ecuaţia de condiţie, ecuaţie de echilibru static, exprimă faptul că reacţiunea forţă orizontală $\mathbf{R_1}$ din blocajul gradului de libertate elastică este zero, deoarece în realitate nodurile structurii se translatează liber (gradul de libertate elastică se manifestă liber) neexistînd pendulul din secţiunea **3 (fig. 8.9.b$_1$).**

$$R_1=r_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{ecuaţia de condiţie}$$

Calculul reacţiunii r_{11}, forţă orizontală (fig. 8.9.a$_9$).

Reacţiunea $\mathbf{r_{11}}$ reprezintă forţa orizontală din blocajul gradului de libertate elastică produsă de acţiunea necunoscutei $\mathbf{Z_1=1}$ pe sitemul de bază **(C.N.F.).** Această reacţiune a fost calculată în ipoteza anterioară de încărcare a structurii (ipoteza **a**) şi are valoarea:

$$r_{11}=+0,2813EI \ \ KN \qquad \textbf{(vezi fig. . 8.9.a}_9\textbf{)}$$

Calculul reacţiunii R_{1F}, forţă orizontală (fig. 8.9.b$_4$).

Se va utiliza ecuaţia de echilibru a riglei cadrului **1-2-3** încărcată cu o forţă exterioară **P=30 KN** orizontală şi forţele tăietoare produse de momentele din diagrama $\mathbf{M_F}$. Deoarece M_F=0 rezultă că pe stâlpi nu apar forţe tăietoare.

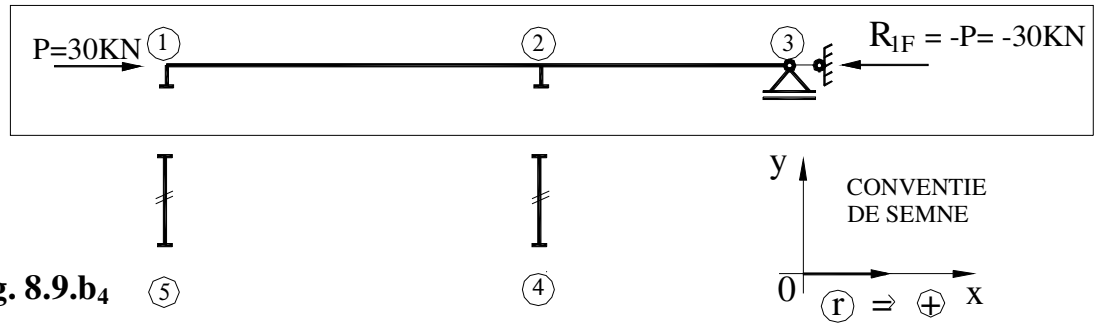


Fig. 8.9.b$_4$

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \quad P\text{-}R_{1F}=0 \quad \Rightarrow \quad R_{1F}=P=30 \ KN$$

Se observă că reacţiunea $\mathbf{R_{1F}}$ acţionează în sens contrar axei ***0x***, deci conform convenţiei de semne va avea valoare negativă. Rezolvând ecuaţia de condiţie se obţine valoarea necunoscutei Z_1:

$$R_1=r_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2813\ EI\cdot Z_1-30=0 \quad \Rightarrow \quad Z_1=+106{,}648\cdot\frac{1}{EI}$$

Se observă că necunoscuta Z_1 a rezultat pozitivă, ceea ce înseamnă că translația nodurilor are loc de la stânga la dreapta.

2. Calculul şi verificarea diagramei de moment M^{FINAL}(fig. 8.9.b$_5$).

Se va utiliza principiul superpoziției şi principiul proporționalității:

$$M^{FINAL}=M_F+m_1\cdot Z_1=m_1\cdot Z_1 \qquad (M_F=0)$$

Calculele se vor face pe schema structurii **(fig. 8.9.b$_5$)**

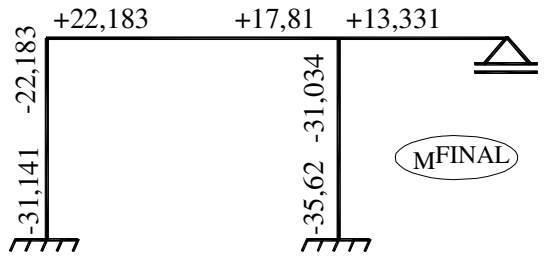


Fig. 8.9.b$_5$

Verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$ se face exprimând echilibrul riglei **1-2-3**, izolată din structură **(fig. 8.9.b$_6$).**

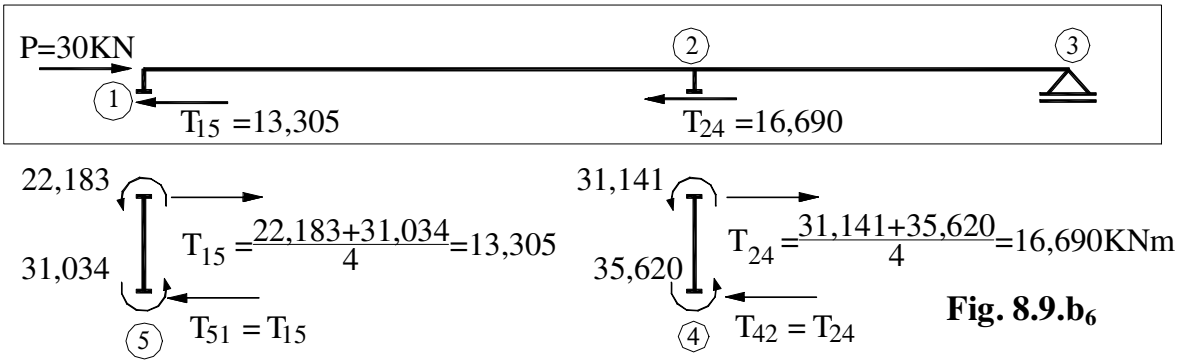


Fig. 8.9.b$_6$

$$\sum_{rigla} X_i = 30-13{,}305-16{,}690=0{,}005 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon=\dfrac{|0{,}005|}{|30|}\cdot 100\%=0{,}017\% \\ \varepsilon<1\% \ \text{(limita admisă)} \end{cases}$$

Reprezentarea diagramei M^{FINAL} în fig. 8.9.b$_7$

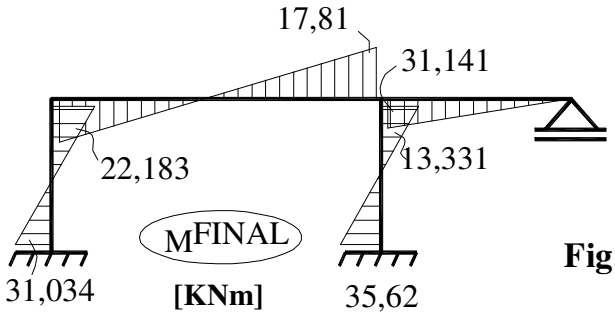


Fig. 8.9.b$_7$

Trasarea poziției deformate a structurii (fig. 8.9.b$_8$).

Se va utiliza valoarea translației nodurilor $\mathbf{Z_1}$, cunoscută din rezolvarea structurii ($Z_1=106{,}648\cdot\frac{1}{EI}$) şi diagrama de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ care indică poziția fibrelor întinse. Se va ține cont de faptul că nodurile **1** şi **2** se şi rotesc, chiar dacă aceste rotiri nu au fost calculate (θ_1 şi θ_2) .

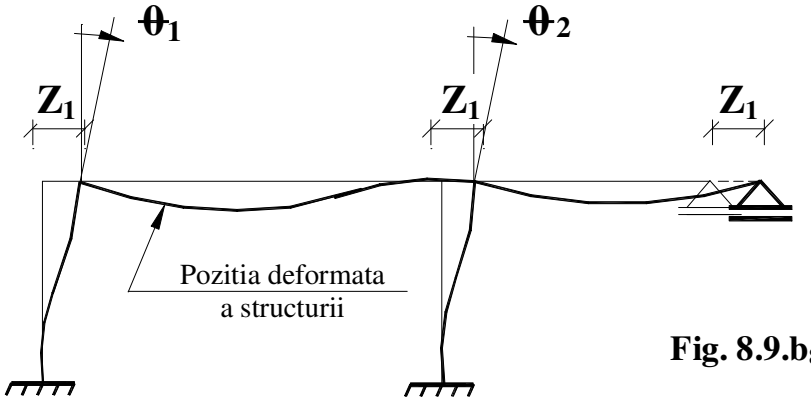


Fig. 8.9.b$_8$

Ipoteza C de încărcare a structurii (fig. 8.9.c).

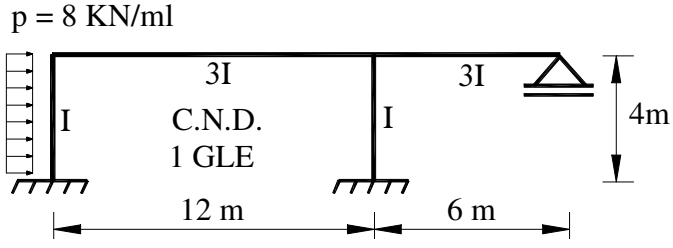


Fig. 8.9.c

Această structură a fost rezolvată anterior la ipoteza "**a**" de încărcare. Prin urmare multe din rezultatele obținute vor fi preluate direct. Structura este un cadru cu noduri deplasabile şi are un grad de libertate elastică (nodurile se pot translata pe direcția orizontală). Rezolvarea se va face folosind procedeul de operare în două etape.

Procedeul de operare în două etape. Etapa I

Sistemul de bază folosit în această etapă este cadrul cu noduri fixe obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor structurii (cu ajutorul unui pendul orizontal introdus în secțiunea **3**), **(fig. 8.9.c$_1$).**

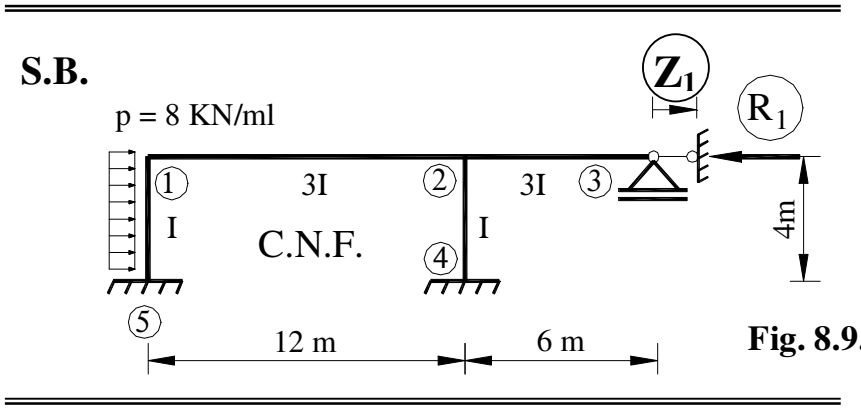


Fig. 8.9.c$_1$

Pe sistemul de bază acționează simultan:

$$\begin{cases} \rightarrow \text{Forțele exterioare } \mathbf{M_F} \\ \rightarrow \text{Necunoscuta translație de nod } \mathbf{Z_1=1} \Rightarrow \mathbf{m_1} \end{cases}$$

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B. $\Rightarrow \mathbf{M_F}$

Pentru determinarea diagramei de moment $\mathbf{M_F}$ produsă de forțele exterioare pe sistemul de bază **(C.N.F.)** şi a diagramei $\mathbf{m_1}$ sunt necesare rigiditățile la rotire de bară $\overline{\mathbf{K}}$ (calculate anterior) şi momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ **(fig. 8.9.c$_2$).**

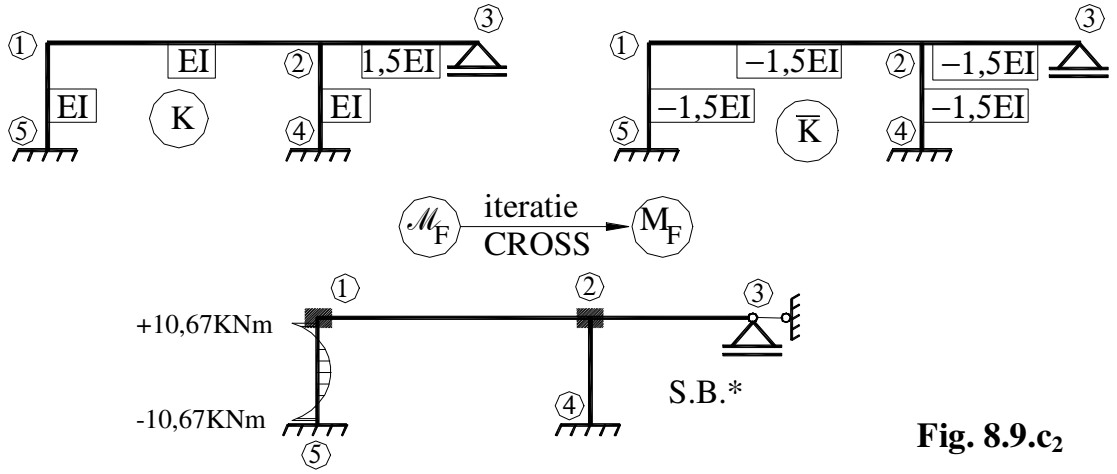


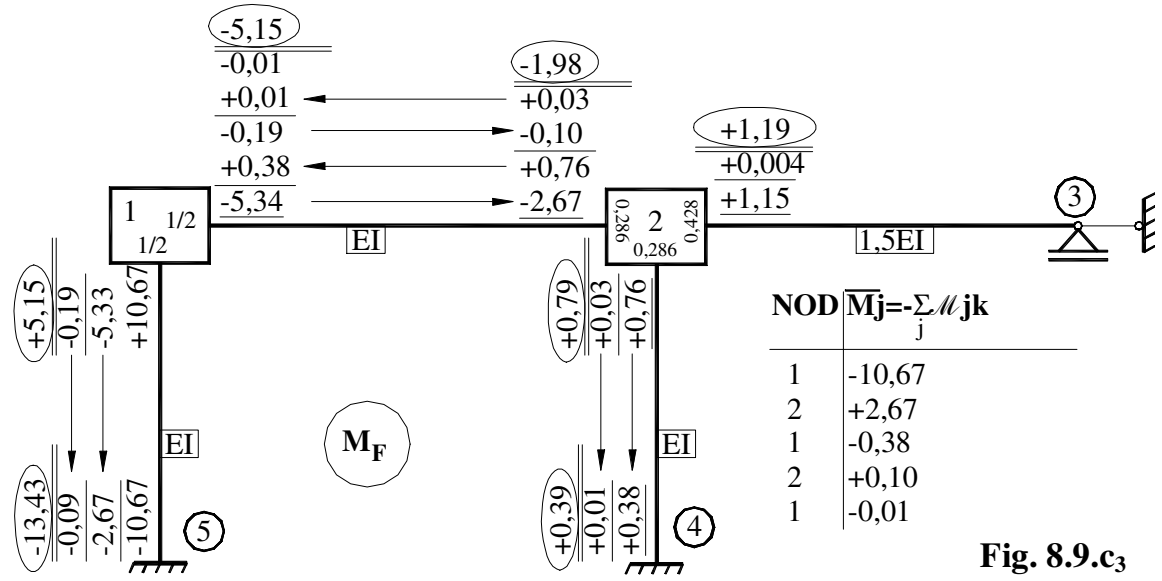
Fig. 8.9.c$_2$

Momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ se reprezintă pe sistemul de bază al cadrului cu noduri fixe **S.B.*** , cadrul de care are nodurile blocate şi la rotire **(fig. 8.9.c$_2$).**

$$\mathcal{M}_{15}=-\mathcal{M}_{51}=-\frac{pl^2}{12}=-\frac{8\cdot 4^2}{12}=-10{,}67\ \ KN\cdot m$$

Schema de iterație. Procedeul iterativ CROSS (fig. 8.9.c$_3$)

Schema de iterație este preluată integral de la aplicația **8.9.a**, având în vedere faptul că nu s-au schimbat caracteristicile geometrice ale structurii.



NOD	$\overline{M}j=-\sum_j \mathcal{M}jk$
1	-10,67
2	+2,67
1	-0,38
2	+0,10
1	-0,01

Fig. 8.9.c$_3$

Acțiunea necunoscutei translație de nod Z_1=1 pe sitemul de bază: m_1

Se va prelua direct diagrama $\mathbf{m_1}$ obținută la rezolvarea structurii în situația **"a"** de încărcare **(fig. 8.9.b$_3$).**

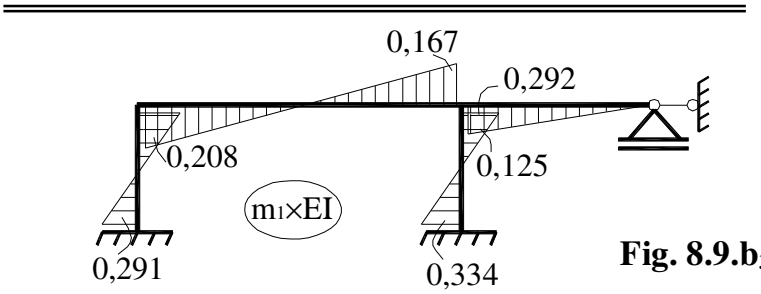


Fig. 8.9.b$_3$

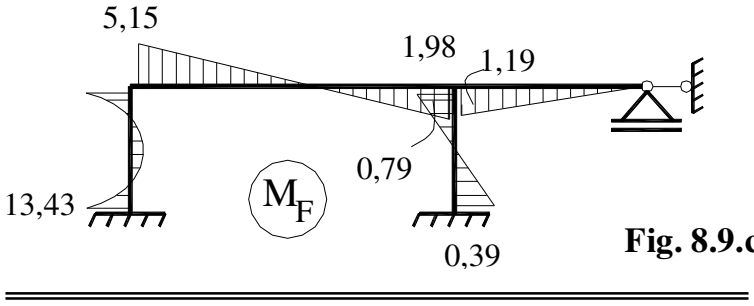


Fig. 8.9.c$_4$

În figura **8.9.c$_4$** este reprezentată diagrama $\mathbf{M_F}$ produsă de forțele exterioare pe sistemul de bază **(C.N.F.).**

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II-a

1. **Determinarea valorii necunoscutei translație de nod, Z_1**

Se va rezolva ecuația de condiție, ecuație de echilibru static, care impune sistemului de bază condiția ca reacțiunea totală $\mathbf{R_1}$ din blocajul gradului de libertate elastică să fie nulă **(fig. 8.9.c$_1$).**

$$R_1=r_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0$$

Calculul reacțiunii r_{11}, forță orizontală (fig. 8.9.a$_9$).

Reacțiunea $\mathbf{r_{11}}$ reprezintă forța orizontală din blocajul gradului de libertate elastică produsă de acțiunea necunoscutei $\mathbf{Z_1=1}$ pe sitemul de bază **(C.N.F.).** Această reacțiune a fost calculată în ipoteza "**a**" de încărcare a structurii **(fig. 8.9.a$_9$)** şi are valoarea:

$$r_{11}=+0,2813EI \quad KN$$

Calculul reacțiunii R_{1F}, forță orizontală (fig. 8.9.,c_5).

Vom utiliza ecuația de echilibru a riglei cadrului încărcat cu forțele exterioare: $\sum_{rigla} X_i = 0$. În ecuație vor intra forțele tăietoare de pe stîlpi produse de momentele $\mathbf{M_F}$ şi forțele exterioare direct aplicate (p=8 KN/ml).

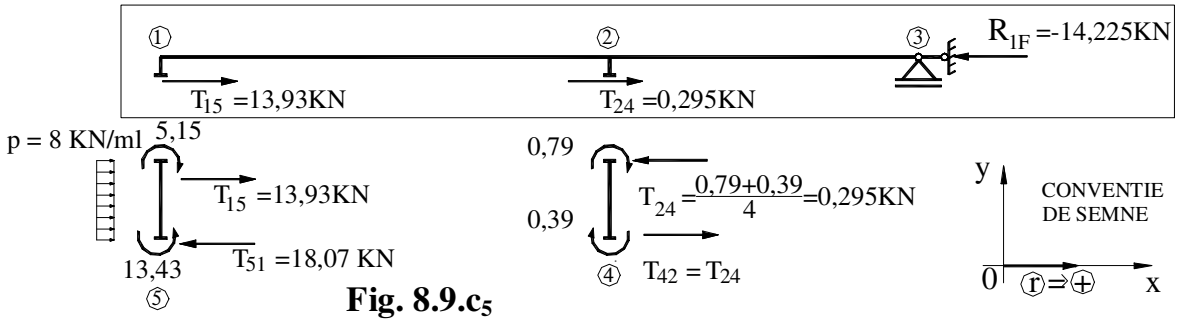


Fig. 8.9.c_5

Rezolvăm stâlpul **1-5** folosind ecuațiile de echilibru static.

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \qquad T_{51}\cdot 4\text{-}13{,}43\text{-}8\cdot 4\cdot 2\text{+}5{,}15\text{=}0 \Rightarrow T_{51}\text{=}18{,}07\ KN$$

$$\left(\sum M\right)_5 = 0 \qquad \text{-}T_{15}\cdot 4\text{+}5{,}15\text{+}8\cdot 4\cdot 2\text{-}13{,}43\text{=}0 \Rightarrow T_{15}\text{=}13{,}93\ KN$$

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \qquad 13{,}93\text{+}0{,}295\text{-}R_{1F}\text{=}0 \Rightarrow R_{1F}\text{=}14{,}225\ KN$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{R_{1F}}$ acționează în sens contrar axei **0x**, deci va avea semnul minus conform convenției de semne adoptată.

Rezolvând ecuația de condiție se obține valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$:

$$0{,}2813\cdot EI\cdot Z_1\text{-}14{,}225\text{=}0 \Rightarrow Z_1\text{=}50{,}569\cdot\frac{1}{EI}$$

Deoarece necunoscuta $\mathbf{Z_1}$ a rezultat pozitivă, înseamnă că translația nodurilor are loc de la stânga spre dreapta.

2. **Calculul şi verificarea diagramei de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ (fig. 8.9.c_6).**

Se va utiliza principiul superpoziției şi principiul proporționalității:

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot Z_1$$

Calculele se vor efectua pe schema structurii:

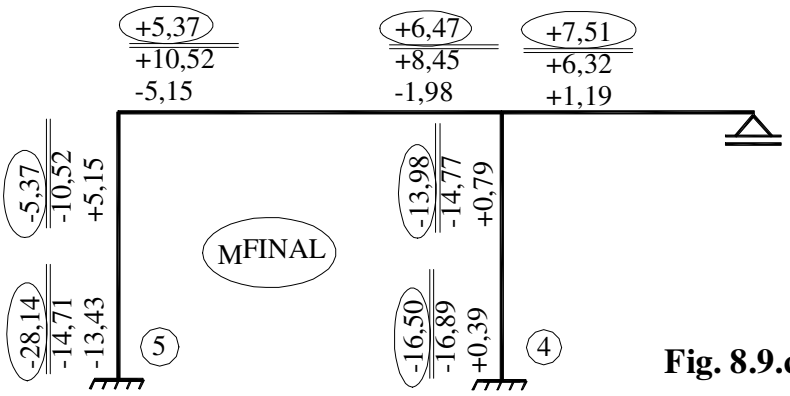


Fig. 8.9.c$_6$

Verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$ se face exprimând echilibrul riglei structurii: $\sum_{rigla} X_i = 0$ **(fig.8.9.c$_7$).** Pentru aceasta se vor calcula forțele tăietoare de pe stâlpii structurii produse de momentele $\mathbf{M^{FINAL}}$ şi de forțele exterioare direct aplicate pe stâlpi **(fig.8.9.c$_7$).**

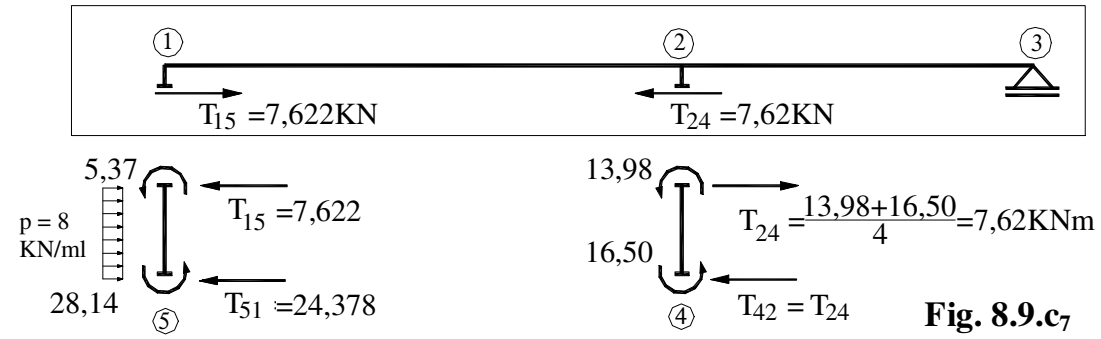


Fig. 8.9.c$_7$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \Rightarrow \quad T_{51}\cdot 4\text{-}28{,}14\text{-}8\cdot 4\cdot 2\text{-}5{,}37=0 \Rightarrow T_{51}=24{,}378\ KN$$

$$\left(\sum M\right)_5 = 0 \Rightarrow \quad -T_{15}\cdot 4\text{-}5{,}37+8\cdot 4\cdot 2\text{-}28{,}14=0 \Rightarrow T_{15}=7{,}622\ KN$$

$$\sum_{rigla} X_i = 7{,}622-7{,}62=0{,}002 \quad \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{|0{,}002|}{|7{,}622|}\cdot 100\% = 0{,}038\% \\ \varepsilon < 1\% \end{cases}$$

Se constată că momentele încovoietoare finale sunt corecte ($\varepsilon < 1\%$), astfel că se poate trasa diagrama $\mathbf{M^{FINAL}}$ şi calcula momentul maxim pe stâlpul **1-5 (fig.8.9.c$_8$).**

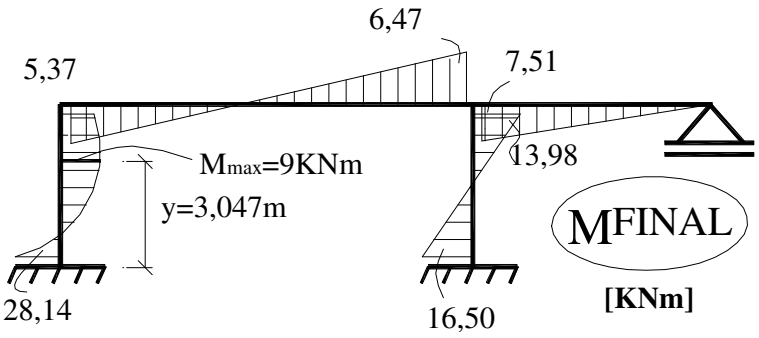


Fig. 8.9.c$_8$

Calculul momentului maxim pe stâlpul 1-5 (fig.8.9.c$_9$).

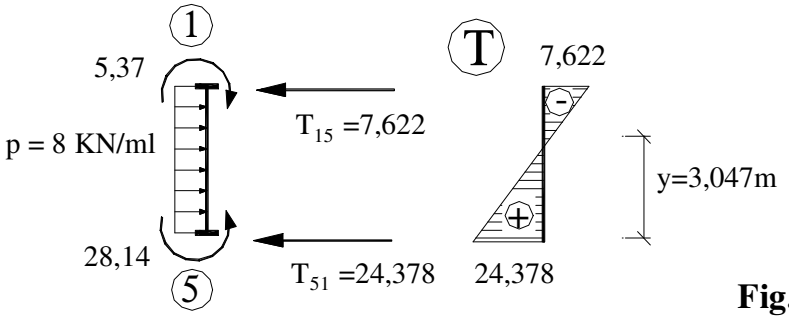


Fig. 8.9.c$_9$

T_y=0 23,378-8·y=0 $y = 3{,}047\ m$

$$M_{max} = 24{,}378 \cdot 3{,}047 - 28{,}14 - 8 \cdot 3{,}047 \cdot \frac{3{,}047}{2} = 9\ KN \cdot m$$

Calculul şi trasarea diagramei T (fig.8.9.c$_{10}$)

Se vor utiliza ecuaţiile de echilibru static pentru fiecare bară izolată din structură. Stâlpul **1-5** a fost deja rezolvat cu ocazia calculului momentului maxim.

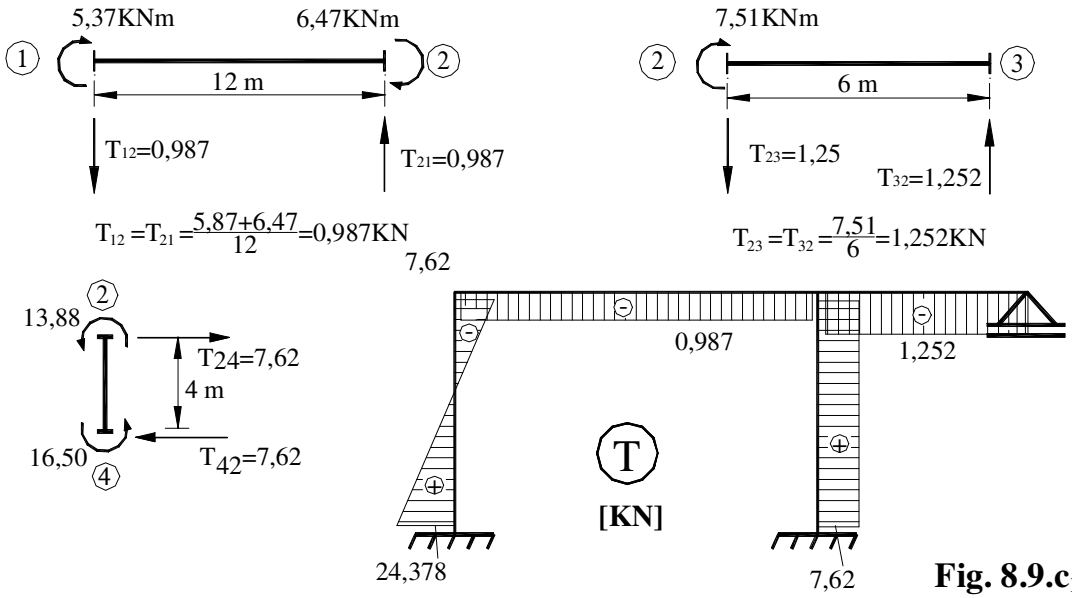


Fig. 8.9.c$_{10}$

Calculul şi trasarea diagramei N (Fig. 8.9.c$_{11}$)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru static exprimate pentru fiecare nod al structurii, considerat punct liber în plan.

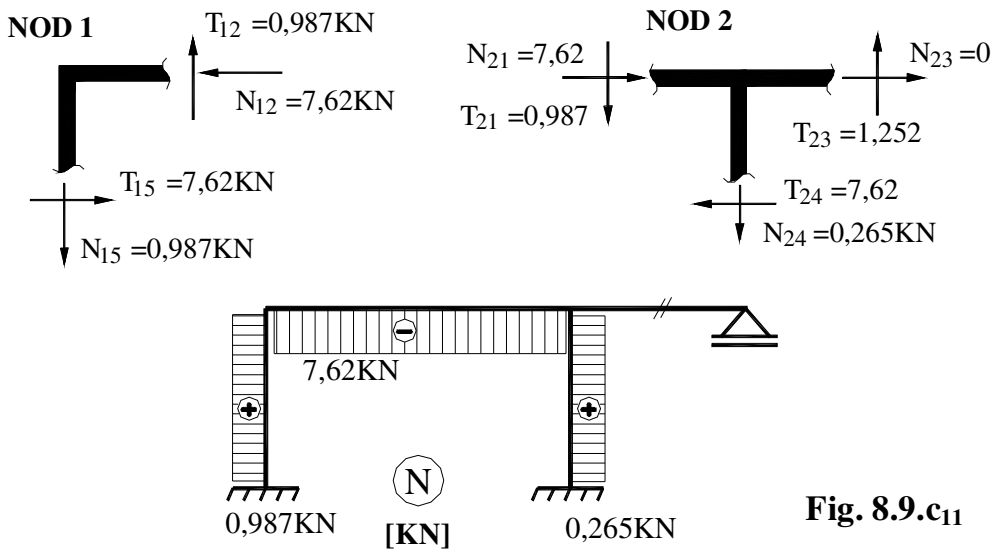


Fig. 8.9.c$_{11}$

Poziția deformată a structurii (fig.8.9.c$_{12}$)

Se utilizează valoarea translației de nod, $\mathbf{Z_1}$, cunoscută din rezolvarea problemei şi diagrama $\mathbf{M^{FINAL}}$ care indică poziția fibrelor întinse. Se ține cont de faptul că nodurile **1** şi **2** se şi rotesc, chiar dacă aceste rotiri $\boldsymbol{\theta_1}$ şi $\boldsymbol{\theta_2}$ nu au fost calculate.

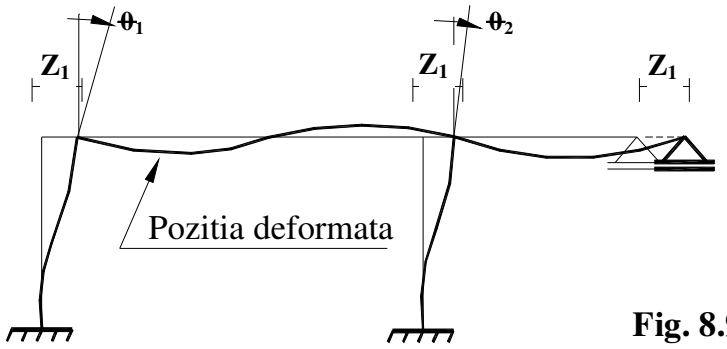


Fig. 8.9.c$_{12}$

APLICAȚIA 10

Se propune calculul şi trasarea diagramei **M** şi a poziției deformate pentru cadrul cu noduri deplasabile din **fig. 8.10.**

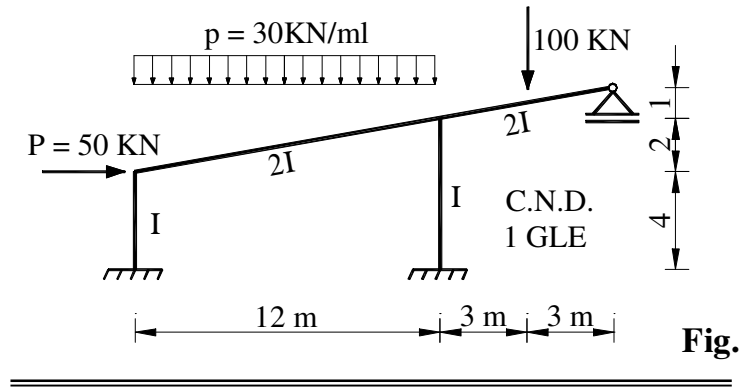


Fig. 8.10

Studiul structurii date se va face cu ajutorul sistemului articulat asociat (obținut prin transformarea nodurilor rigide şi a încastrărilor din reazeme în articulații) **(fig. 8.10.1.)**

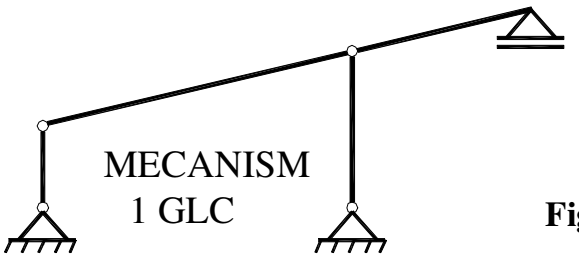


Fig. 8.10.1

$$N_{GLC}=|l+r-3c|=|3\cdot 2+5-3\cdot 4|=|-1|$$

$$N_{GLC}=1 \quad \Rightarrow \quad N_{GLE}=1$$

Sistemul articulat fiind mecanism cu un grad de libertate cinematică rezultă că structura dată este un cadru cu noduri deplasabile care are un grad de libertate elastică (există o singură posibilitate de deformare a structurii cu nodurile translatate).

Se va rezolva structura cu ajutorul procedeul de operare în două etape.

Procedeul de operare în două etape. Etapa I

Sistemul de bază folosit in etapa I este cadrul cu noduri fixe obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor (folosind un pendul orizontal introdus în secțiunea 3) **(fig. 8.10.2)**.

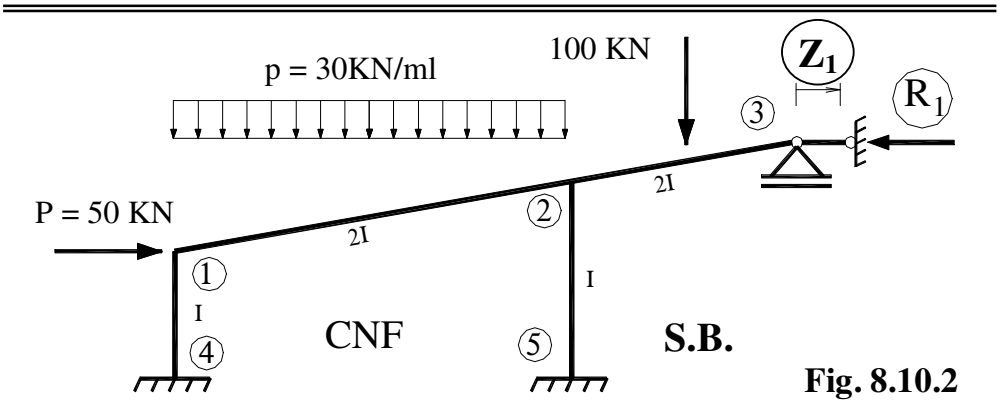


Fig. 8.10.2

Pe sistemul de bază acționează simultan:

- Forțele exterioare $\Rightarrow \mathbf{M_F}$
- Necunoscuta translație de nod $\mathbf{Z_1=1} \Rightarrow \mathbf{m_1}$

Rezolvarea sistemului de bază

Acțiunea forțelor exterioare pe S.B. Calculul diagramei $\mathbf{M_F}$

Pentru calculul diagramelor de moment $\mathbf{M_F}$ şi $\mathbf{m_1}$ sunt necesare rigiditățile la rotire de nod *K* şi la rotire de bară $\overline{K}$. De asemenea trebuie să se calculeze momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$, produse de forțele exterioare pe sitemul de bază **(C.N.F.).** Momentele de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ se vor trasa pe sistemul de bază al cadrului cu noduri fixe, **S.B***, sistem în care nodurile rigide sunt blocate şi la rotire **(fig. 8.10.3).**

Calculul rigidităților la rotire de nod K (fig. 8.10.3)

$$K_{12} = \frac{4 \cdot 2EI}{12{,}165} = 0{,}658\ EI; \qquad K_{14} = \frac{4 \cdot EI}{4} = EI\ ; \qquad K_{25} = \frac{4 \cdot EI}{6} = 0{,}667EI$$

$$K_{23} = \frac{3 \cdot 2EI}{6{,}083} = 0{,}986EI$$

Calculul rigidităţilor la rotire de nod $\overline{K}$ (fig. 8.10.3).

$$\overline{K}_{12} = -\frac{6 \cdot 2EI}{12{,}165} = -0{,}986EI \qquad \overline{K}_{14} = -\frac{6 \cdot EI}{4} = -1{,}5EI \qquad \overline{K}_{25} = -\frac{6 \cdot EI}{6} = -EI$$

$$\overline{K}_{23} = -\frac{3 \cdot 2EI}{6{,}083} = -0{,}986EI$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ (Fig. 8.10.3)

$$\mathcal{M}_{12} = -\mathcal{M}_{21} = -\frac{pl^2}{12} = -\frac{30 \cdot 12^2}{12} = -360 \ KN \cdot m$$

$$\mathcal{M}_{23} = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{30 \cdot 100 \cdot 6}{16} = -112{,}5 \ KN \cdot m$$

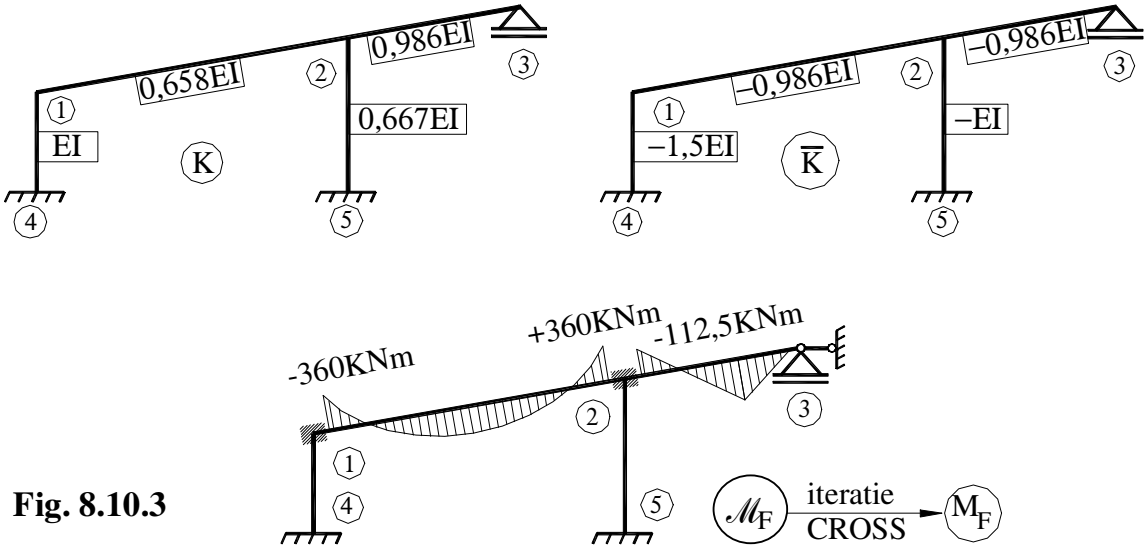


Fig. 8.10.3

Momentele de încastrare perfecte $\mathcal{M}_F$ se iterează folosind procedeul distribuţiei şi transmiterii momentelor (CROSS) obţinând diagrama $\mathbf{M_F}$.

Calculul coeficienţilor de distribuţie d_{jk}

NODUL 1

$$K_1 = K_{12} + K_{14} = (0{,}658+1)EI = 1{,}658 \ EI$$

$$d_{12} = \frac{K_{12}}{K_1} = \frac{0{,}658 \cdot EI}{1{,}658 \cdot EI} = 0{,}397 \qquad d_{14} = \frac{K_{14}}{K_1} = \frac{EI}{1{,}658 \cdot EI} = 0{,}603 \qquad \sum_1 d_{1K} = 1{,}000$$

NODUL 2

$$K_2 = K_{21}+K_{23}+K_{25} = (0{,}658+0{,}667+0{,}986)EI = 2{,}311\ EI$$

$$d_{21}=\frac{K_{21}}{K_2}=\frac{0{,}658\cdot EI}{2{,}311\cdot EI}=0{,}285 \qquad d_{23}=\frac{K_{23}}{K_2}=\frac{0{,}986\cdot EI}{2{,}311\cdot EI}=0{,}427$$

$$d_{25}=\frac{K_{25}}{K_2}=\frac{0{,}667EI}{2{,}311\cdot EI}=0{,}288 \qquad \sum d_{2K}=1{,}000$$

Aplicarea procedeului iterativ CROSS. Schema de iterație (fig. 8.10.4)

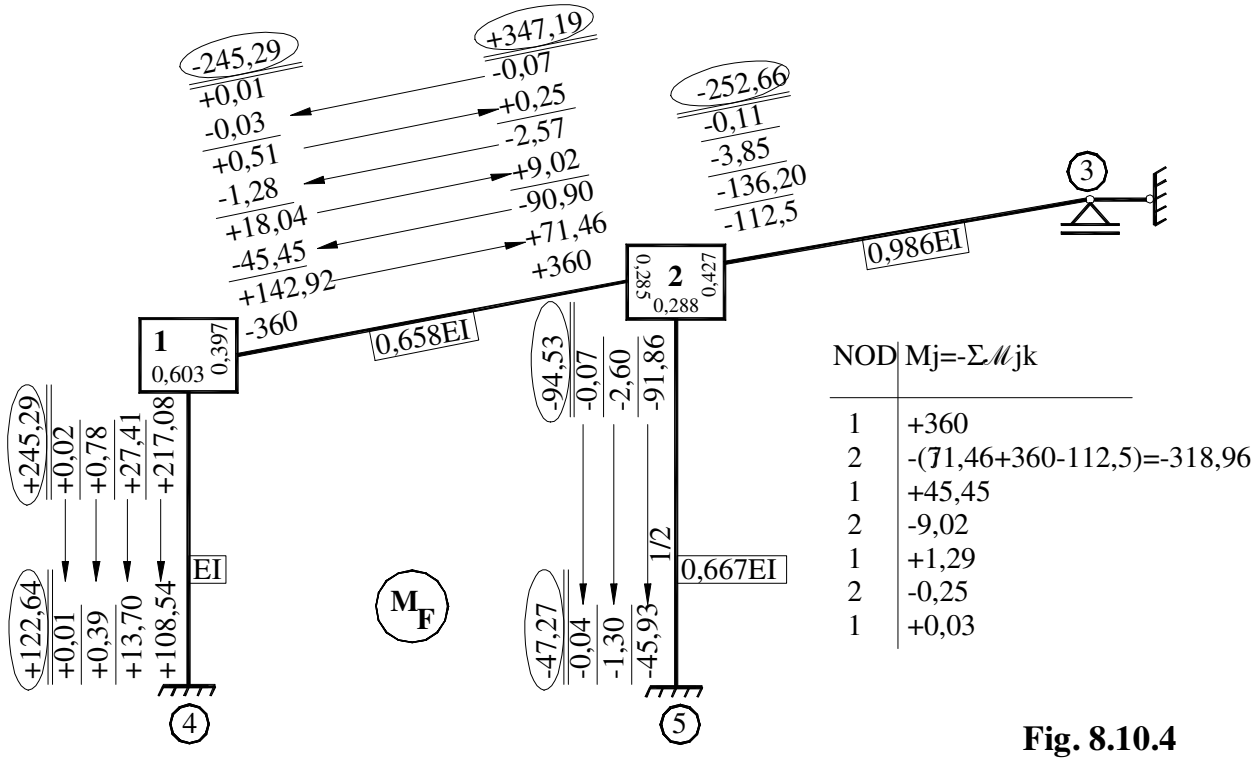


Fig. 8.10.4

Acțiunea necunoscutei Z_1=1 pe sistemul de bază. Calculul diagramei m_1 (fig. 8.10.5)

Pentru calculul momentelor de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$, produse de acțiunea necunoscutei Z_1=1 pe sistemul de bază trebuie cunoscute valorile rotirilor de bară ψ produse de translația de nod. Se va utiliza în acest scop sistemul articulat, mecanism cu un grad de libertate cinematică. **(Fig. 8.10.5)**

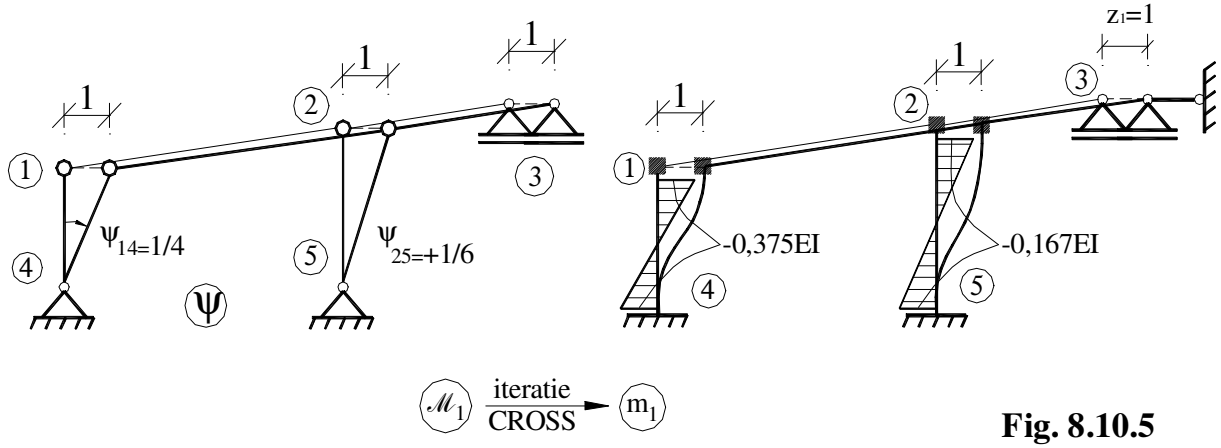


Fig. 8.10.5

Calculul rotirilor de bară ψ (fig. 8.10.5)

$$\psi_{14} = +\frac{1}{4}; \quad \psi_{25} = +\frac{1}{6}; \quad (tg\psi \approx \psi); \quad \psi_{12} = \psi_{23} = 0$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă $\mathcal{M}_F$ (fig. 8.10.5)

$$\mathcal{M}_{14} = \mathcal{M}_{41} = \overline{K}_{14} \cdot \psi_{14} = (-1{,}5EI)\left(+\frac{1}{4}\right) = -0{,}375EI \ \ KN{\cdot}m$$

$$\mathcal{M}_{25} = \mathcal{M}_{52} = \overline{K}_{25} \cdot \psi_{25} = (-EI)\left(+\frac{1}{6}\right) = -0{,}167EI \ \ KN{\cdot}m$$

Schema de iterație pentru calculul momentelor m_1 (fig. 8.10.6)

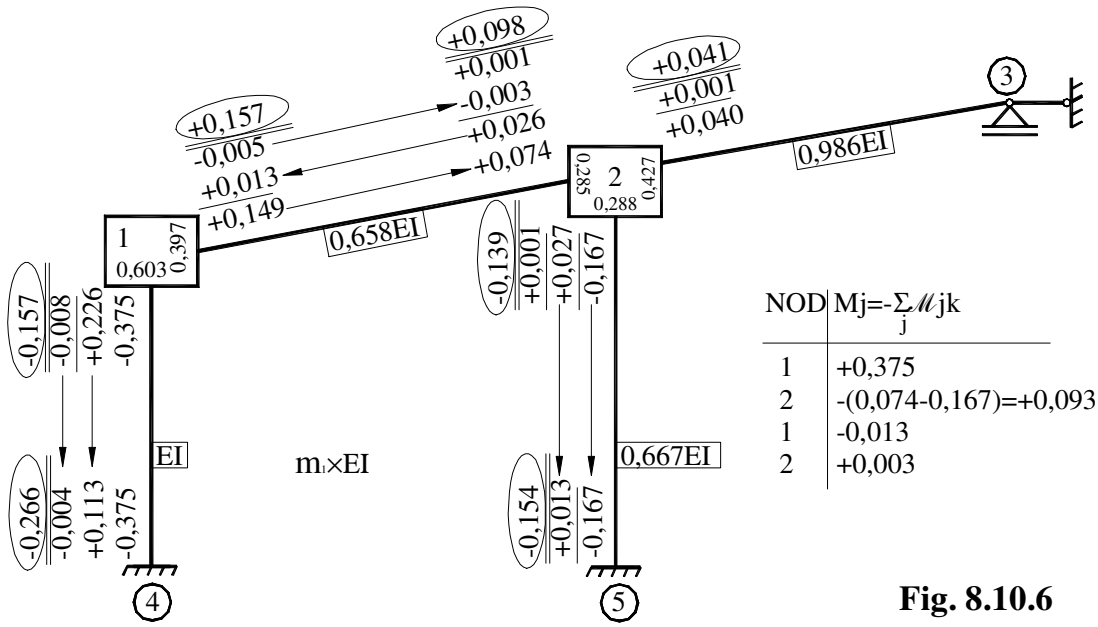


Fig. 8.10.6

Se vor reprezenta diagramele de momente $\mathbf{M_F}$ şi $\mathbf{m_1}$ obținute în etapa întâia în **fig. 9.10.7**.

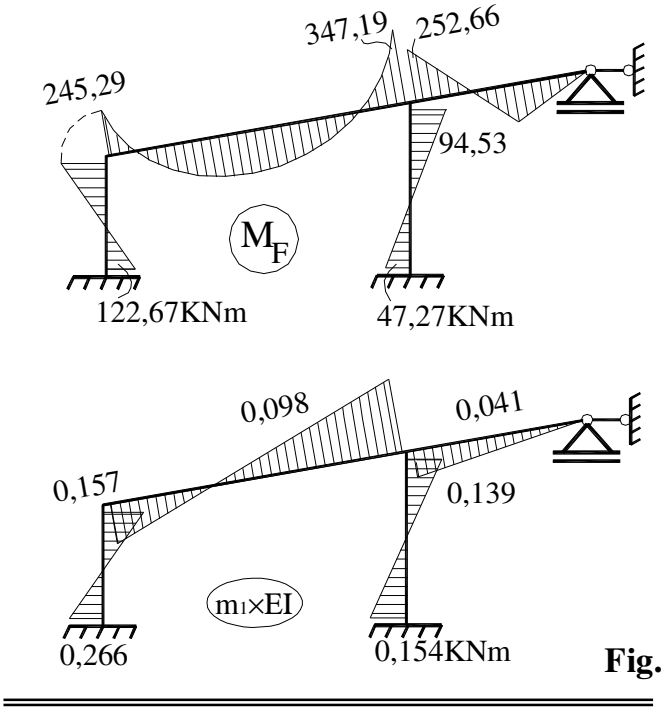


Fig. 8.10.7

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II-a

1. Calculul necunoscutei Z_1, translație de nod

Se va rezolva ecuația de condiție, ecuație de echilibru static, care impune sistemului de bază condiția ca reacțiunea totală $\mathbf{R_1}$ din blocajul gradului de libertate elastică să fie nulă **(fig. 8.10.2).**

$$R_1 = r_{11} \cdot Z_1 + R_{1F} = 0$$

Calculul reacțiunii r_{11}, forță orizontală (fig. 8.10.8).

Reacțiunea $\mathbf{r_{11}}$ reprezintă forța orizontală din blocajul gradului de libertate elastică produsă de acțiunea necunoscutei $\mathbf{Z_1=1}$ pe sitemul de bază **(C.N.F.).** Această reacțiune se poate calcula exprimând echilibrul riglei cadrului sub acțiunea forțelor tăietoare de pe stâlpi produse de momentele $\mathbf{m_1}$.

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow r_{11} - 0{,}1058 \cdot EI - 0{,}0488 \cdot EI = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{11} = 0{,}1546 EI \ \ KN$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{r_{11}}$ a rezultat în sensul axei **0x** deci ea va fi introdusă în ecuația de condiție cu semnul plus.

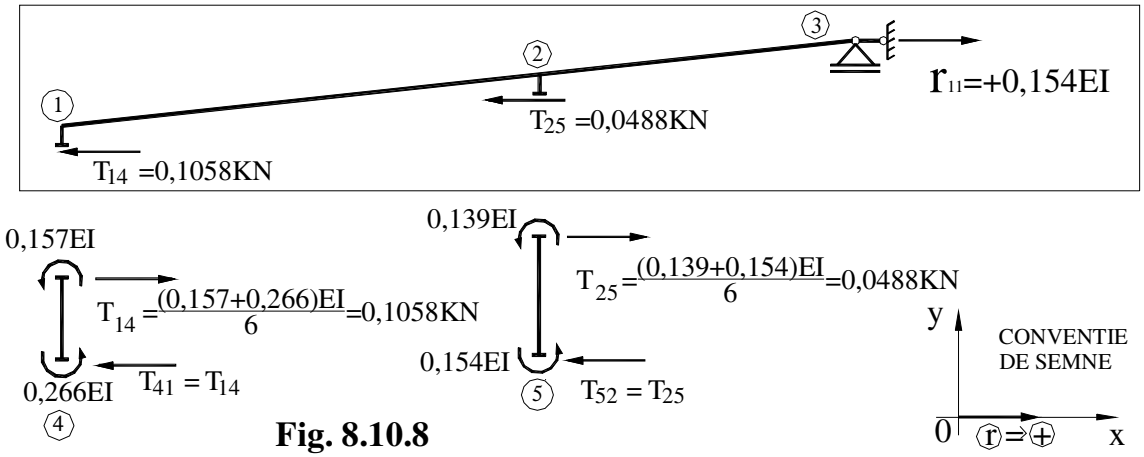


Fig. 8.10.8

Calculul reacțiunii R_{1F}, forță orizontală (fig. 8.10.9).

Reacțiunea forță orizontală $\mathbf{R_{1F}}$ reprezintă forța produsă în blocajul gradului de libertate elastică de acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază **(C.N.F.).** Pentru calculul ei se va izola rigla cadrului şi se va scrie ecuația de echilibru $\sum_{rigla} X_i = 0$, în care vor intra forțele tăietoare de pe stâlpii structurii produse de momentele $\mathbf{M_F}$ şi forța orizontală P = 50 KN direct aplicată pe bară.

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow \quad 50 + 91{,}99 - 23{,}63 - R_{1F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_{1F} = 118{,}36\ KN$$

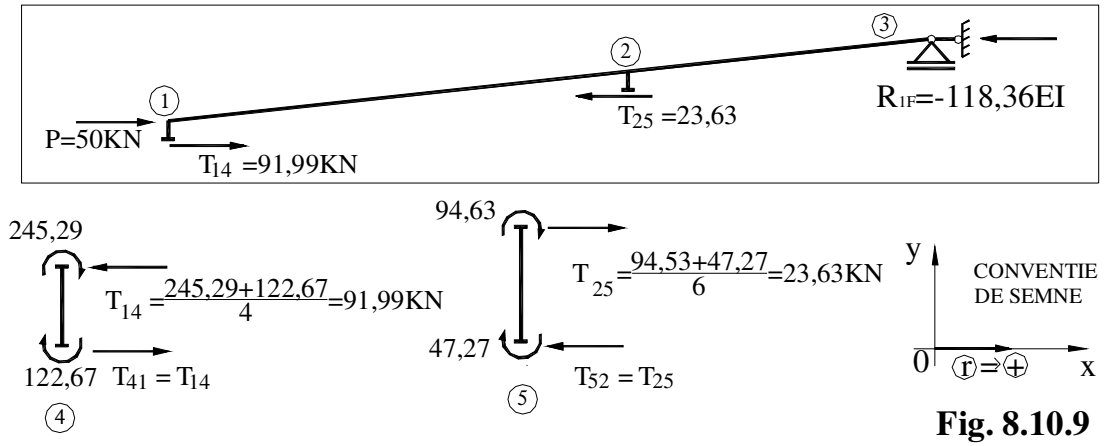


Fig. 8.10.9

Se observă că reacțiunea $\mathbf{R_{1F}}$ a rezultat în sens opus axei **0x**, deci va fi introdusă în ecuația de condiție cu semnul minus. Rezolvând ecuația de condiție se obține valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$, translație de nod:

$$R_1 = r_{11}\cdot Z_1 + R_{1F} = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}1546\, EI \cdot Z_1 - 118{,}36 = 0 \;\Rightarrow\; Z_1 = 765{,}588 \cdot \frac{1}{EI}$$

Necunoscuta $\mathbf{Z_1}$ a rezultat pozitivă ceea ce înseamnă că translația nodurilor are loc de la stânga spre dreapta **(fig. 8.10.2).**

Calculul şi verificarea diagramei de moment finală (fig. 8.10.10).

Aplicând simultan principiul superpoziției şi principiul proporționalității se obține:

$$M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot Z_1$$

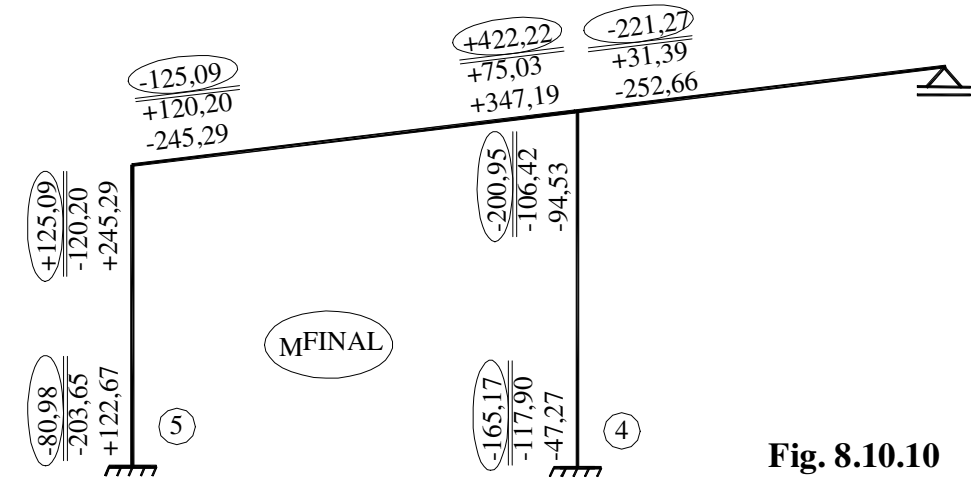


Fig. 8.10.10

Verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$ se face utilizând echilibrul riglei (eliberată din structură prin secționarea stâlpilor) încărcată cu forțele tăietoare de pe stâlpi produse de momentele finale şi cu forța orizontală P = 50 KN, care acționează direct pe bară **(fig. 8.10.11).**

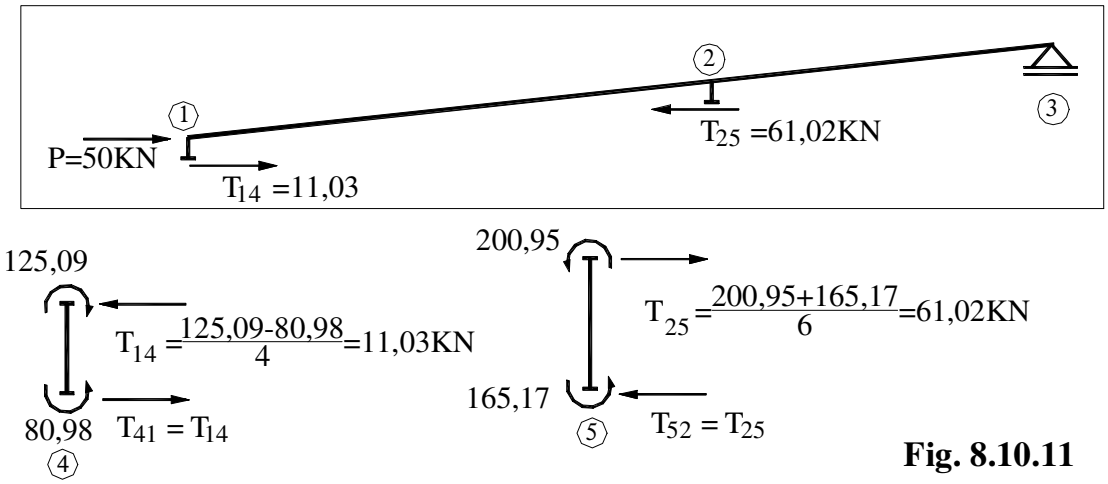


Fig. 8.10.11

$$\sum_{rigla} X_i = 50 + 11{,}03 - 61{,}02 = 61{,}03 - 61{,}02 = 0{,}01$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{|0{,}01|}{|61{,}03|} \cdot 100\% = 0{,}016\% \\ \varepsilon < 1\% \end{cases}$$

3. Trasarea diagramei M^{FINAL} şi calculul momentelor maxime (fig. 8.10.12)

Erorile de calcul ε fiind mult mai mici decât limita admisă se poate trasa diagrama M^{FINAL}. Calculul momentului maxim pe bara **1-2** , respectiv al vârfului pe bara **2-3** se va face utilizând ecuaţiile de echilibru corespunzătoare acestor bare izolate din structură **(Fig. 8.10.13)**

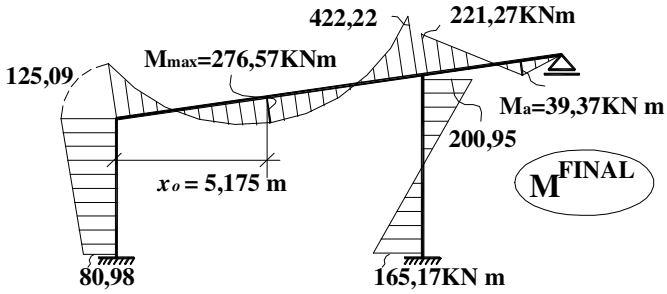
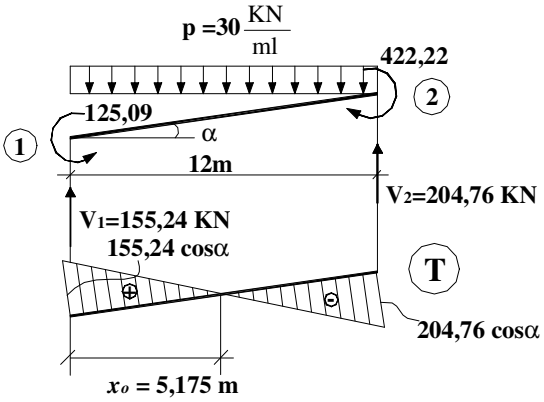


Fig. 8.10.12

Bara 1-2



$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 12 - 125{,}09 - 30 \cdot 12 \cdot 6 + 422{,}22 = 0$$
$$\Rightarrow V_1 = 155{,}24 KN$$
$$(\sum M)_1 = -V_2 \cdot 12 + 422{,}22 + 30 \cdot 12 \cdot 6 - 125{,}09 = 0$$
$$\Rightarrow V_2 = 204{,}76 KN$$

Fig. 8.10.13

$$T_{x_0} = 0 \Rightarrow V_1 \cdot \cos\alpha - 30 \cdot x_0 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_0 = \frac{V_1}{30} = \frac{155{,}24}{30} = 5{,}175$$
$$M_{\max} = 155{,}24 \cdot 5{,}175 - 125{,}09 - 30 \cdot 5{,}175 \frac{5{,}175}{2} = 276{,}57 KNm$$

Bara 2-3

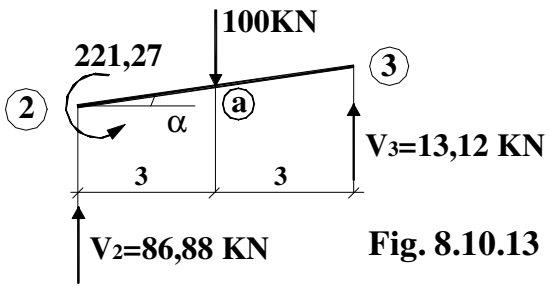


Fig. 8.10.13

$$(\sum M)_3 = 0 \Rightarrow V_2 \cdot 6 - 221{,}27 - 100 \cdot 3 = 0$$

$$V_2 = 86{,}88 KN$$

$$(\sum M)_2 = 0 \Rightarrow -V_3 \cdot 6 + 100 \cdot 3 - 221{,}27 = 0.$$

$$V_3 = 13{,}12 KN$$

$$M_a = 86{,}88 \cdot 3 - 221{,}27 = 39{,}37 KNm$$

Trasarea poziției deformate a structurii (Fig.8.10.14)

Se va utiliza translația de nod $\mathbf{Z_1}$ cunoscută ($Z_1 = 765{,}588 \cdot \frac{1}{EI}$) şi diagrama de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ care indică poziția fibrelor întinse. Se ține, de asemenea, cont de faptul că nodurile **1** şi **2** se şi rotesc (θ_1 , θ_2), chiar dacă aceste rotiri nu au fost calculate.

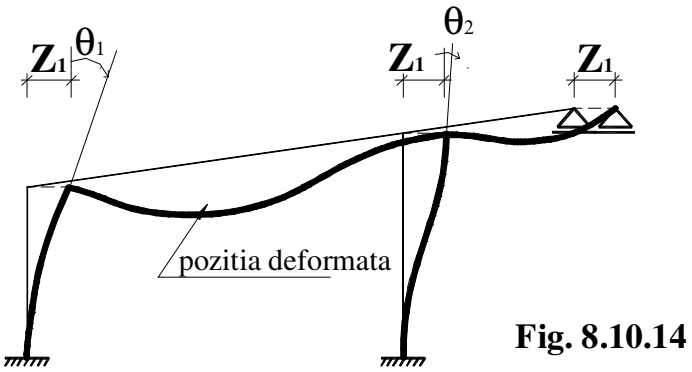


Fig. 8.10.14

APLICAȚIA 11

Se propune determinarea diagramelor **M**, **T** şi **N**, precum şi trasarea poziției deformate pentru structura din **fig. 8.11.**

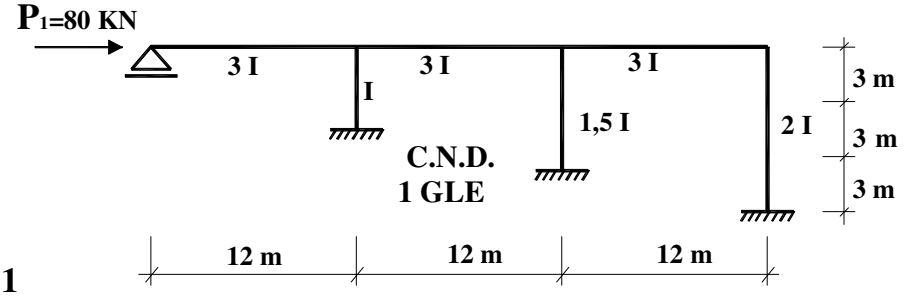


Fig. 8.11

Se va stabili numărul gradelor de libertate elastică utilizând sistemul articulat asociat structurii **(Fig.8.11.1)**

SISTEMUL ARTICULAT

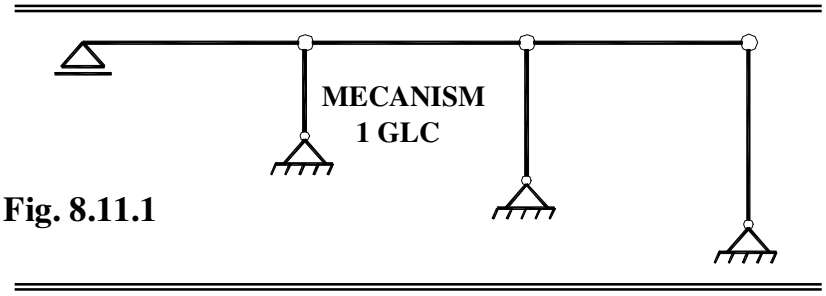


Fig. 8.11.1

$$N_{GLC} = |l + r - 3c| = |5 \cdot 2 + 7 - 3 \cdot 6| = |-1|$$
$$N_{GLE} = N_{GLC} = 1$$

Sistemul articulat fiind un mecanism care are un grad de libertate cinematică, rezultă că structura dată este un cadru cu noduri deplasabile având un grad de libertate elastică.

Rezolvarea structurii se va face utilizând procedeul de operare în două etape.

Procedeul de operare în două etape. Etapa I

Sistemul de bază folosit în etapa I este cadrul cu noduri fixe, obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor (**Fig. 8.11.2**).

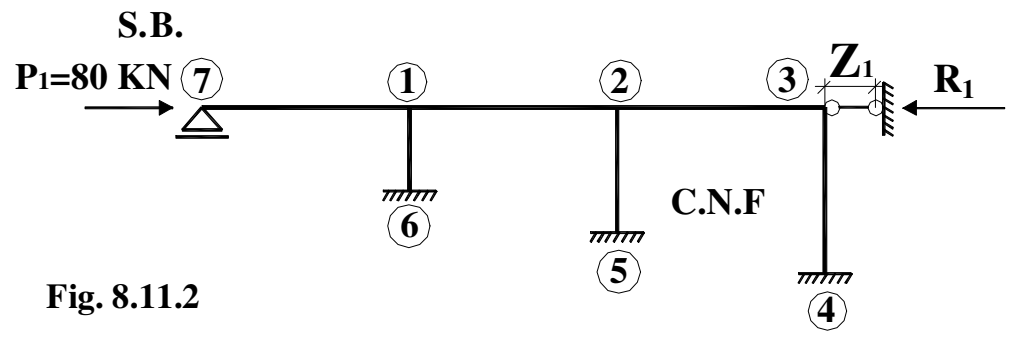


Fig. 8.11.2

Pe sistemul de bază acționează simultan forța exterioară P care dă naştere diagramei de momente $\mathbf{M_F}$ şi necunoscuta translație de nod $\mathbf{Z_1=1}$ care produce diagrama $\mathbf{m_1}$. Scopul etapei **I** constă în determinarea acestor două diagrame. Pentru aceasta sunt necesare rigiditățile la rotire de nod **"*k*"** şi rigiditățile la rotire de bară "$\bar{k}$", calculate în cele ce urmează **(Fig.8.11.3).**

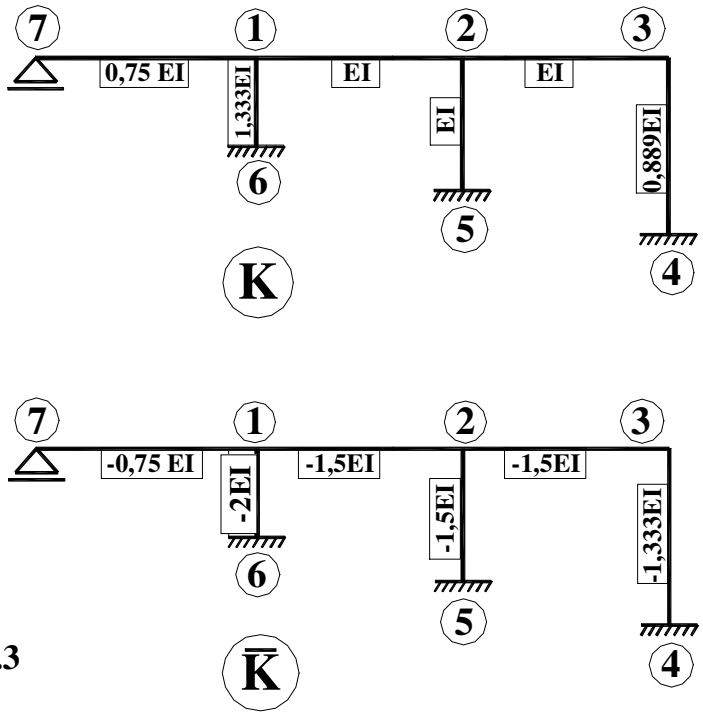


Fig. 8.11.3

Calculul rigidităților de nod "*k*":

$$k_{17}=\frac{3\cdot 3EI}{12}=0{,}75EI\,;\quad k_{12}=k_{23}=\frac{4\cdot 3EI}{12}=EI\,;\quad k_{16}=\frac{4\cdot EI}{3}=1{,}333EI\,;$$

$$k_{25}=\frac{4\cdot 1{,}5EI}{6}=EI\,;\qquad k_{34}=\frac{4\cdot 2EI}{9}=0{,}889EI$$

▪ **Calculul rigidităților la rotire de bară "$\overline{k}$":**

$$\overline{k_{17}}=-\frac{3\cdot 3EI}{12}=-0{,}75EI;\quad \overline{k_{12}}=\overline{k_{23}}=-\frac{6\cdot 3EI}{12}=-1{,}5EI\,;\quad \overline{k_{16}}=-\frac{6\cdot EI}{3}=-2EI$$

$$\overline{k_{25}}=-\frac{6\cdot 1{,}5EI}{6}=-1{,}5EI\,;\quad \overline{k_{34}}=-\frac{6\cdot 2EI}{9}=-1{,}333EI$$

Acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază. Calculul momentelor M_F.

Pentru obținerea momentelor $\mathbf{M_F}$ trebuie mai întâi să se calculeze momentele de încărcare perfectă $\mathscr{M}_F$ produse de forțele exterioare pe sistemul de bază **(C.N.F.).** Sistemul de bază al cadrului cu noduri fixe se obține blocând nodurile la rotire **(S.B*.) (Fig.8.11.4)**

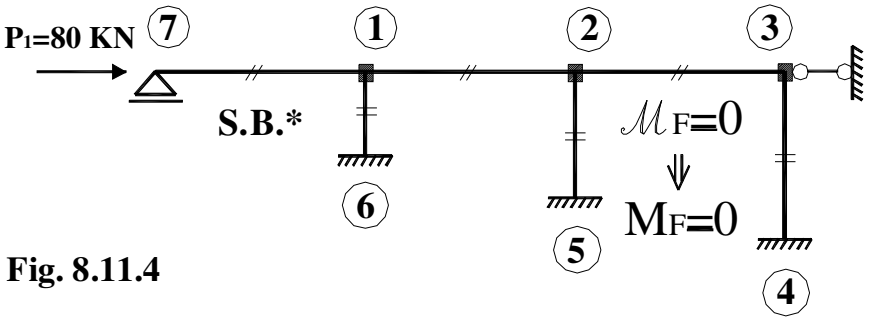


Fig. 8.11.4

Se observă că singura forță exterioară, P=80KN, acționează în secțiunea **7**, barele structurii nefiind încărcate direct. Rezultă că momentele de încastrare perfectă sunt nule şi ca atare şi momentele $\mathbf{M_F}$ vor fi nule.

Acțiunea necunoscutei $Z_1=1$ pe sistemul de bază. Calculul momentelor m_1

Pentru determinarea momentelor de încastrare perfectă $\mathscr{M}_1$ produse de translația de nod $\mathbf{Z_1=1}$ sunt necesare rotirile de bară ψ produse de respectiva translație. Rotirile de bară ψ se vor obține studiind sistemul articulat, mecanism cu un grad de libertate cinematică. **(Fig.8.11.5).**

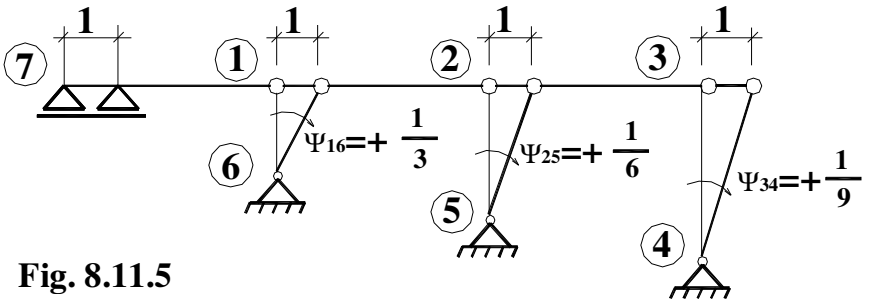


Fig. 8.11.5

Ipoteză acceptată: $tg\psi = \psi$ $\psi_{17}= \psi_{12}= \psi_{23}= 0$

Calculul momentelor de încastrare perfectă $\mathscr{M}_1$. (Fig.8.11.6)

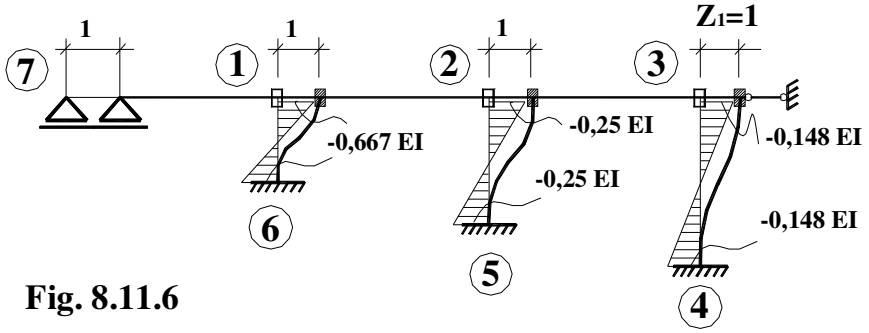


Fig. 8.11.6

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow[CROSS]{iteratie} \mathbf{m_1}$$

$$\mathcal{M}_{16}=\mathcal{M}_{61}=\overline{k_{16}}\,\psi_{16}=(-2EI)(+\frac{1}{3})=-0{,}67EI$$

$$\mathcal{M}_{25}=\mathcal{M}_{52}=\overline{k_{25}}\,\psi_{25}=(-1{,}5EI)(+\frac{1}{6})=-0{,}25EI$$

$$\mathcal{M}_{34}=\mathcal{M}_{43}=\overline{k_{34}}\,\psi_{34}=(-1{,}333EI)(+\frac{1}{9})=-0{,}148EI$$

Schema de iterație pentru calculul momentelor m_1 (Fig.8.11.7)

Calculul coeficienților de distribuție d_{jk}

Nodul 1

$$k_1=k_{17}+k_{12}+k_{16}=3{,}083EI$$

$$d_{17}=\frac{k_{17}}{k_1}=\frac{0{,}75EI}{3{,}083EI}=0{,}243$$

$$d_{12}=\frac{k_{12}}{k_1}=\frac{EI}{3{,}083EI}=0{,}324; \qquad d_{16}=\frac{k_{16}}{k_1}=\frac{1{,}333EI}{3{,}083EI}=0{,}433$$

$$\sum_1 d_{1k}=0{,}243+0{,}324+0{,}433=1{,}000$$

Nodul 2

$$k_2=k_{21}+k_{25}+k_{23}=3EI$$

$$d_{21}=d_{25}=d_{23}=\frac{k_{21}}{k_2}=\frac{1}{3};$$

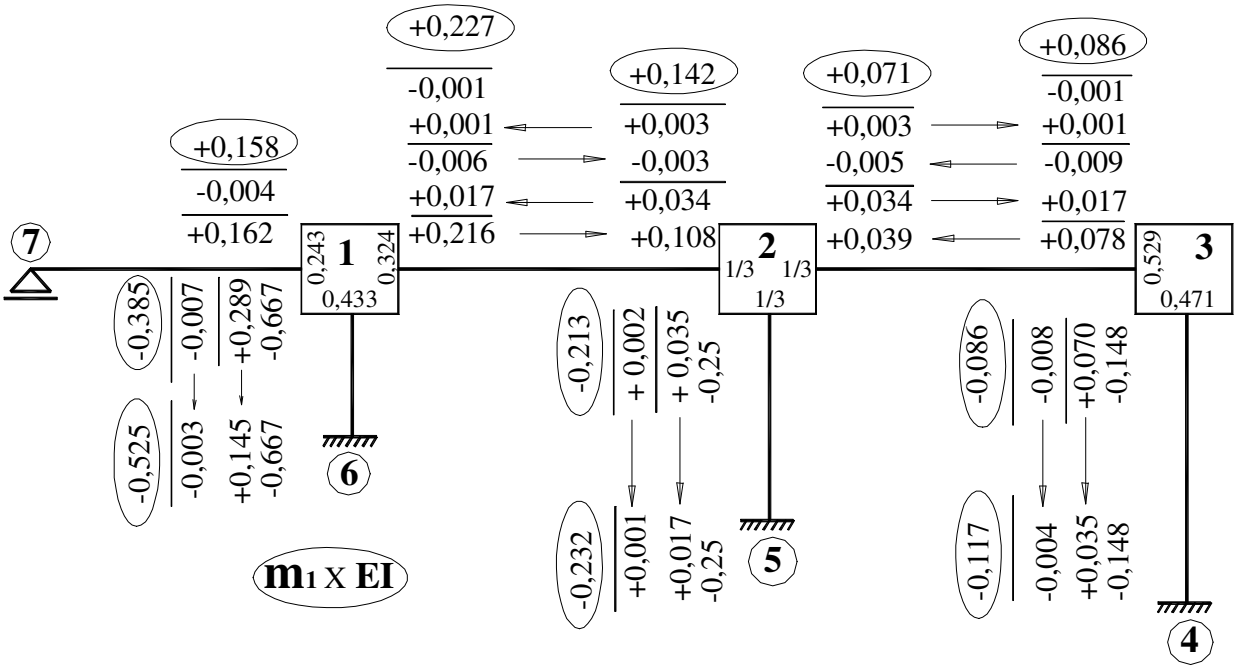
$$\sum_2 d_{2k}=1$$

Nodul 3

$$k_3=k_{32}+k_{34}=1{,}889EI$$

$$d_{32}=\frac{EI}{1{,}889\,EI}=0{,}529; \qquad d_{34}=\frac{k_{34}}{k_3}=0{,}471;$$

$$\sum_3 d_{3k}=1{,}000$$



NOD	$\overline{M}j=-\sum_j M_{jk}$
1	+0,667
3	+0,148
2	-(0,108+0,039-0,25)=+0,103
1	-0,017
3	-0,017
2	+0,008
1	-0,001
3	-0,001

Fig. 8.11.7

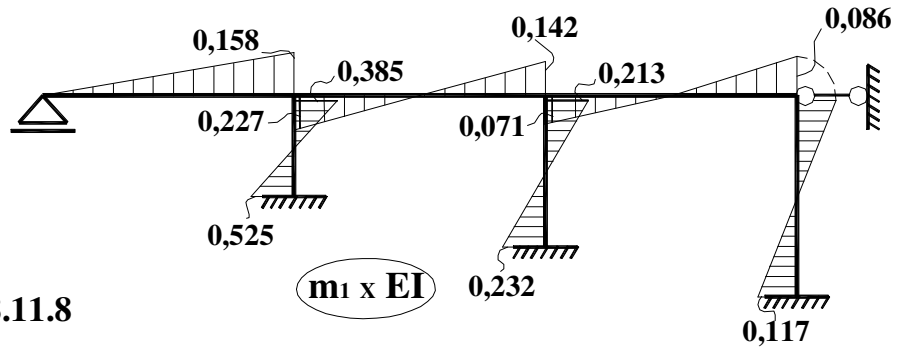


Fig. 8.11.8

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II-a

1. Se va calcula în primul rând valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$ translație de nod. Pentru aceasta trebuie să se rezolve ecuația de condiție, ecuație ce exprimă faptul că reacțiunea totală $\mathbf{R_1}$ din blocajul gradului de libertate este zero, nodurile structurii reale având posibilitatea de a se translata liber (**Fig.8.11.2**).

$R_1 = 0 \Rightarrow r_{11} \cdot Z_1 + R_{1F} = 0$ (ecuația de condiție, ecuație de echilibru static)

Calculul reacțiunii r_{11}, forță orizontală (Fig. 8.11.9)

Se va exprima echilibrul riglei structurii pe care acționează forțele tăietoare produse de momentele $\mathbf{m_1}$ pe stâlpi.

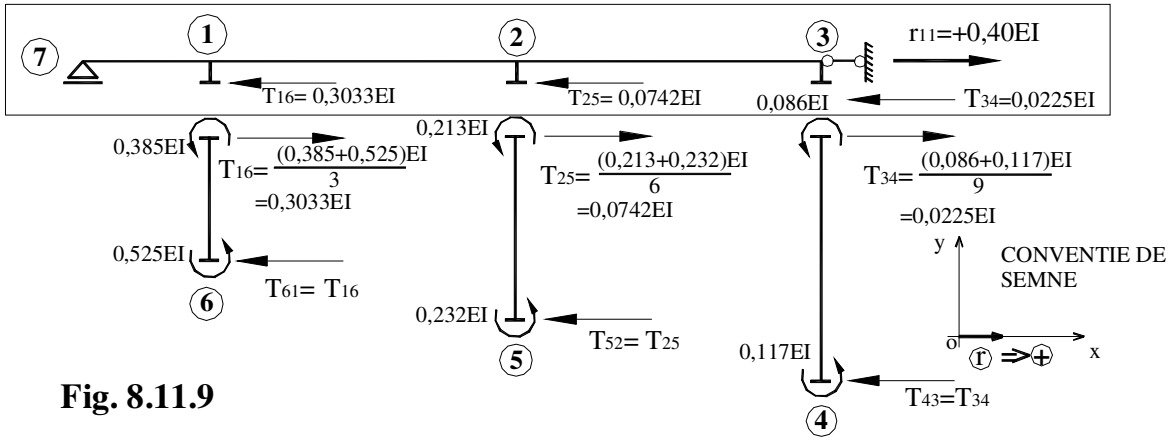


Fig. 8.11.9

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow r_{11} - 0{,}3033EI - 0{,}0742EI - 0{,}0225EI = 0 \Rightarrow r_{11} = 0{,}40EI$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{r_{11}}$ a rezultat în sensul axei **Ox,** deci va fi introdusă în ecuația de condiție cu semnul plus.

Calculul reacțiunii R_{1F} , forță orizontală (Fig. 8.11.10)

Se va utiliza tot ecuația de echilibru a riglei structurii pe care acționează forța exterioară P=80KN şi forțele tăietoare de pe stâlpi produse de momentele $\mathbf{M_F}$. Având în vedere faptul că $\mathbf{M_F = 0}$, rezultă că şi forțele tăietoare pe stâlpi vor fi zero.

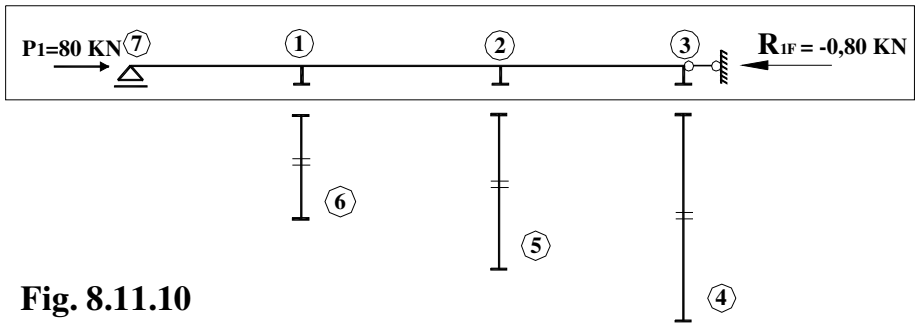


Fig. 8.11.10

Se observă că reacţiunea $\mathbf{R_{1F}}$ a rezultat în sensul contrar axei **Ox**, deci ea va avea semnul minus.

Rezolvând ecuatia de condiţie se obţine valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$.

$$R_1 = r_{11}Z_1 + R_{1F} = 0 \Rightarrow 0{,}40 \cdot EI \cdot Z_1 - 80 = 0 \Rightarrow Z_1 = 200 \cdot \frac{1}{EI}[m]$$

Deoarece necunoscuta $\mathbf{Z_1}$ a rezultat pozitivă, înseamnă că translaţia nodurilor structurii are loc de la stânga spre dreapta.

2. Calculul şi verificarea diagramei de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ (Fig.8.11.11)

Utilizând simultan principiul superpoziţiei şi principiul porţionalităţii se obţine:

$$\begin{cases} M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot Z_1 = m_1 \cdot Z_1 \\ M_F \equiv 0 \end{cases}$$

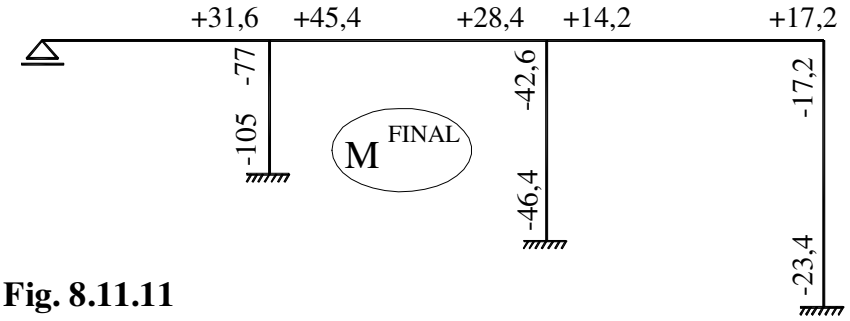


Fig. 8.11.11

Verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$

Se va utiliza ecuaţia de echilibru a riglei: $\sum_{rigla} X_i = 0$, (**Fig.8.11.12**)

$$\sum_{rigla} X_i = 80 - 60{,}667 - 14{,}833 - 4{,}5 = 0$$

$$\varepsilon = 0\%$$

Eroarea de calcul ε fiind mult mai mică decât limita acceptata, rezultă că diagrama $\mathbf{M^{FINAL}}$ este corectă.

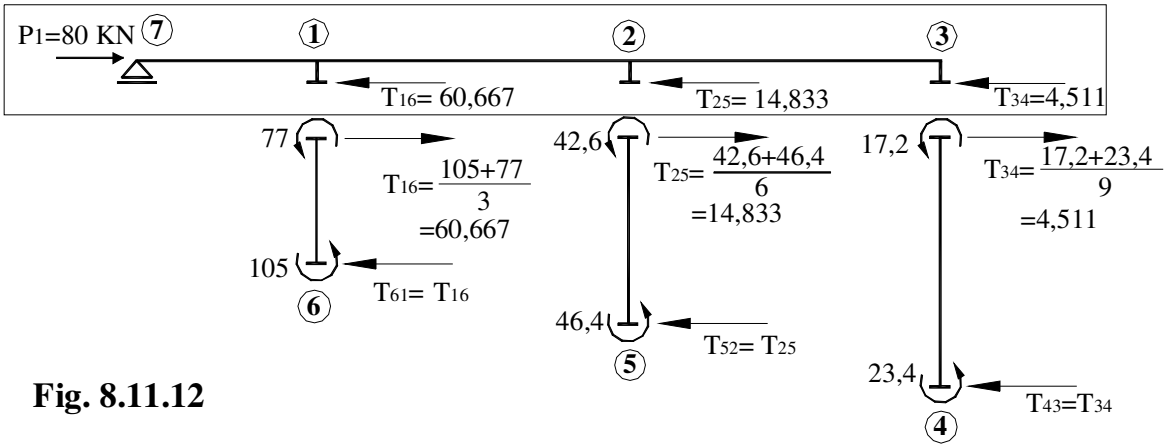


Fig. 8.11.12

Se reprezintă diagrama de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ în **fig.8.11.13.**

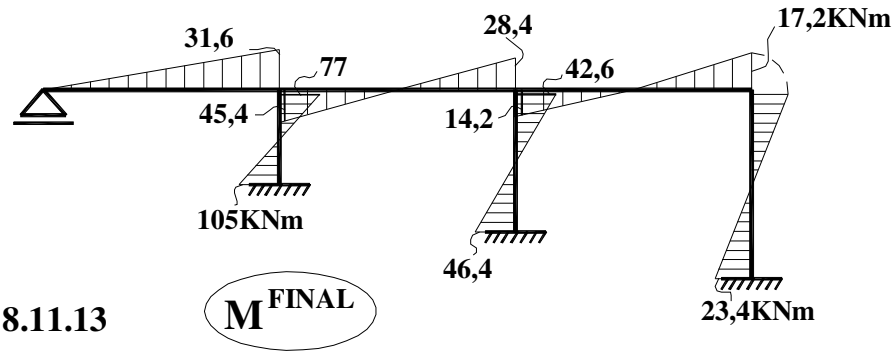


Fig. 8.11.13

Calculul şi trasarea diagramei T (Fig. 8.11.14)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru static pentru fiecare bară a structurii.

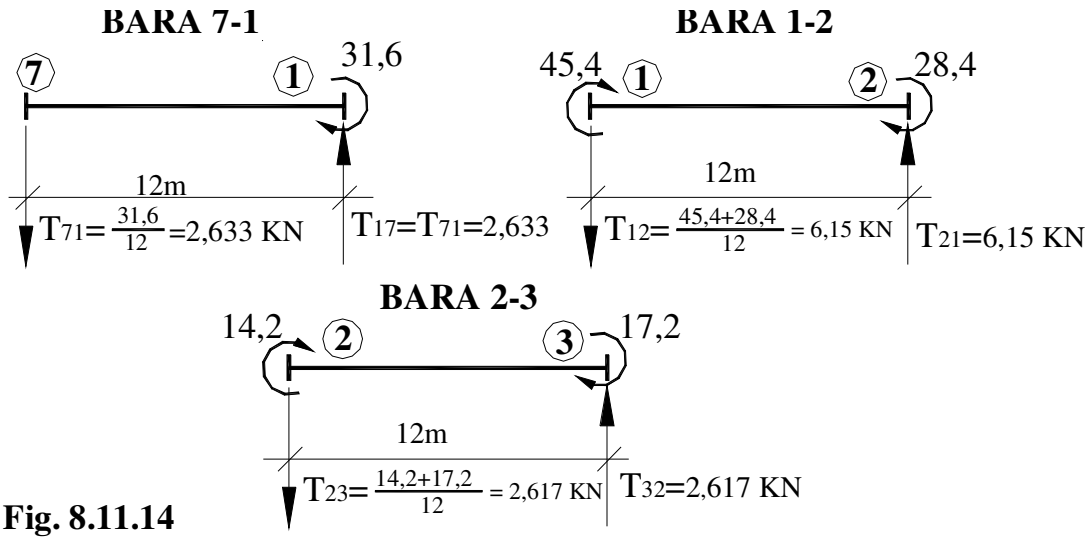


Fig. 8.11.14

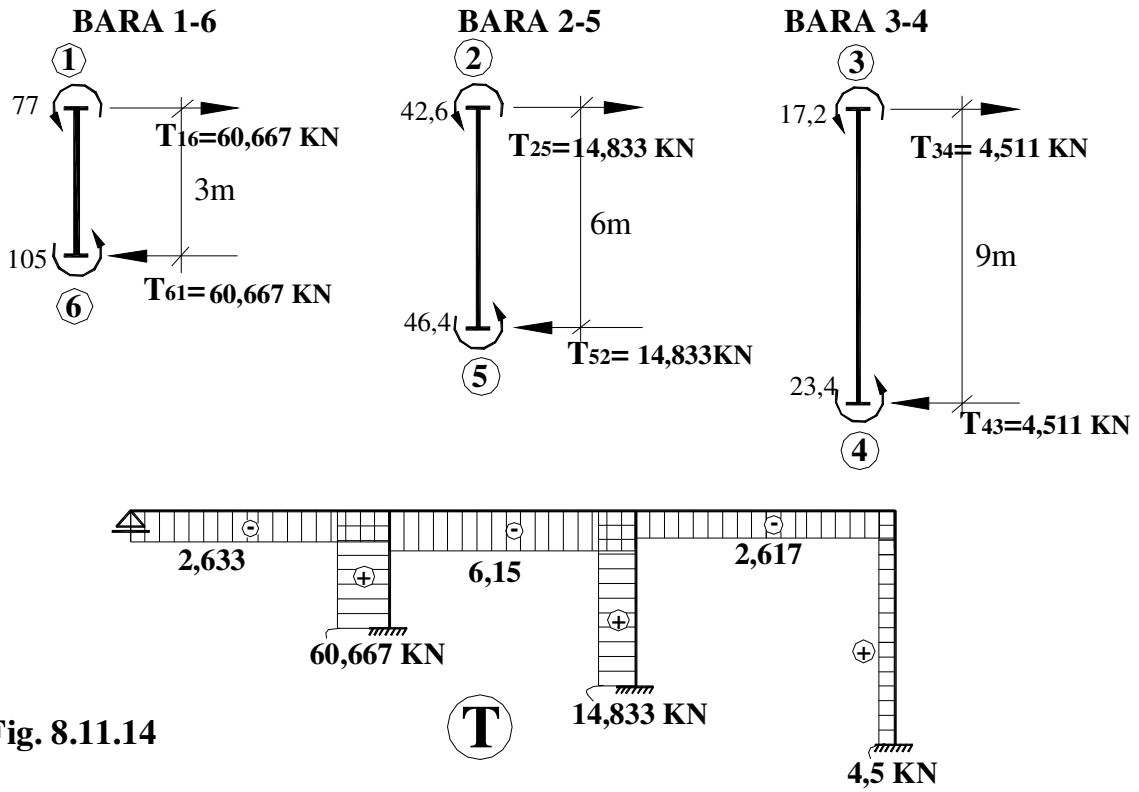


Fig. 8.11.14

Calculul şi trasarea diagramei N (Fig.8.11.15)

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru static pentru fiecare nod al structurii, considerat punct liber în plan.

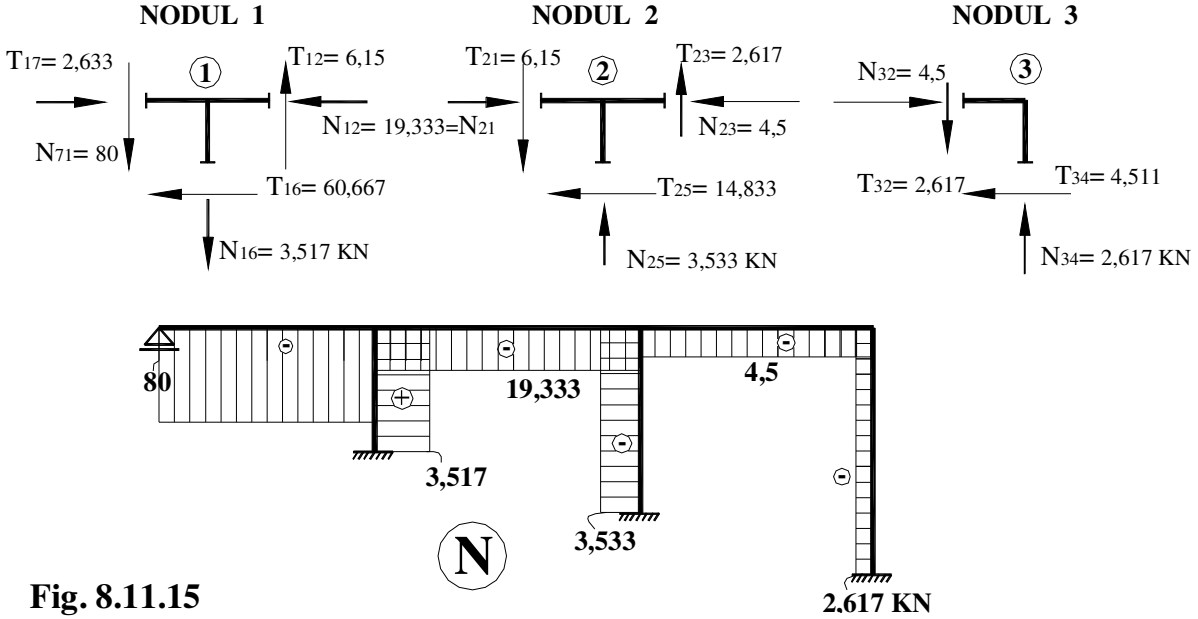


Fig. 8.11.15

Având trasate diagramele **T** şi **N** se pot identifica cu uşurinţă reacţiunile structurii (**Fig.8.11.16**).

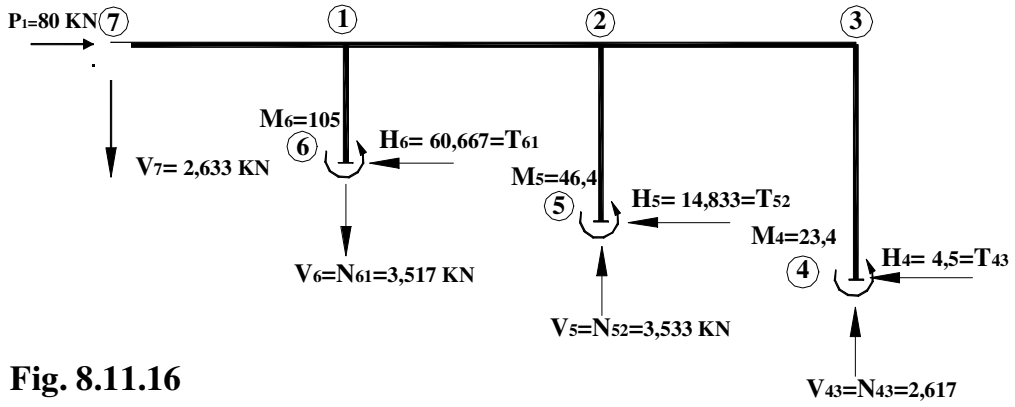


Fig. 8.11.16

Trasarea poziţiei deformate a structurii (Fig.8.11.17)

Se va folosi necunoscuta translaţiei de nod $Z_1=200\frac{1}{EI}$ şi diagrama $\mathbf{M}^{\mathbf{FINAL}}$ care indică poziţia fibrelor întinse. De asemenea se va ţine cont şi de faptul că nodurile rigide se rotesc ($\boldsymbol{\theta_1, \theta_2, \theta_3}$).

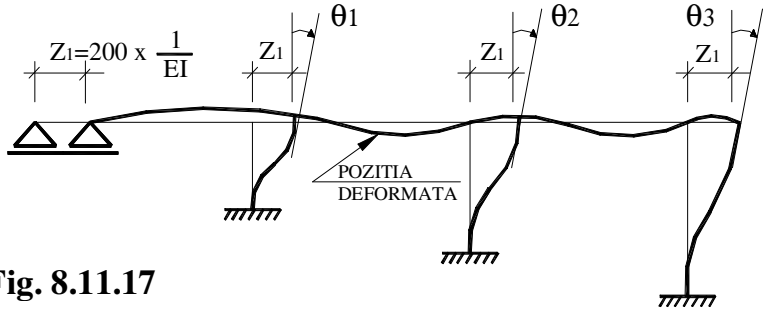


Fig. 8.11.17

APLICAŢIA 12

Se propune determinarea de eforturi diagramelor **M**, **T** şi **N** pentru structura din **fig.8.12**.

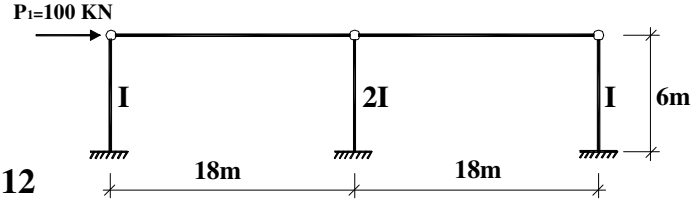


Fig. 8.12

Se observă că structura din **Fig. 8.12** are toate nodurile articulatii perfecte. Apelând la sistemul articulate asociat se constată că structura este un cadru cu noduri deplasabile cu un grad de libertate elastică **(Fig.8.12.1)**

SISTEMUL ARTICULAT ASOCIAT

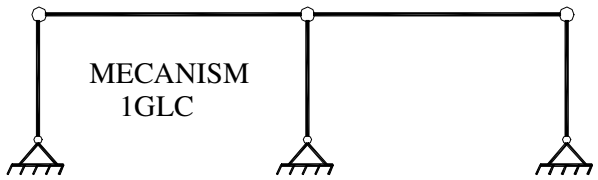


Fig. 8.12.1

$$N_{GLC} = |l + r - 3c| = |4 \cdot 2 + 6 - 5 \cdot 3| = |-1|$$
$$N_{GLE} = N_{GLC} = 1$$

Pentru rezolvare se va utiliza procedeul de operare în două etape.

Etapa I

Sistemul de bază folosit în etapa I-a este cadrul cu noduri fixe obținut prin blocarea posibilității de translație a nodurilor.**(fig.8.12.2)**

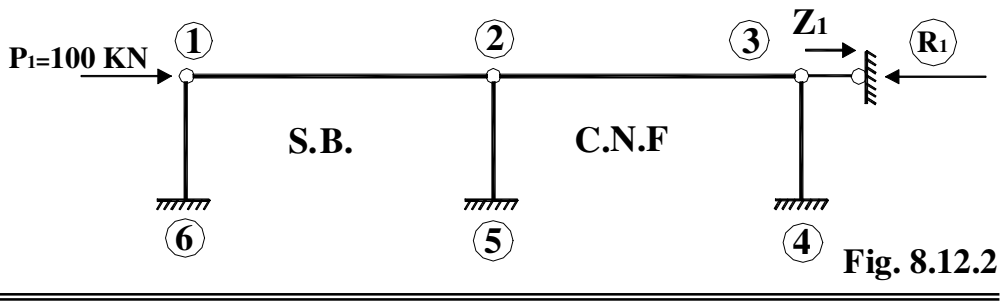


Fig. 8.12.2

Pe sistemul de bază acționează simultan forțele exterioare care dau naştere la diagrama de momente $\mathbf{M_F}$ şi necunoscuta translație de nod $\mathbf{Z_1=1,}$ care produce momentele $\mathbf{m_1}$. Pentru calculul acestor momente sunt necesare de rigiditățile la rotire de bara $\bar{k}$. Structura, având articulații perfecte în noduri, va avea diagramele de moment $\mathbf{M_F}$ şi $\mathbf{m_1}$ în echilibru (nu mai sunt necesare iterații).

Acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază. Calculul momentelor $\mathbf{M_F}$ (**Fig.8.12.3**)

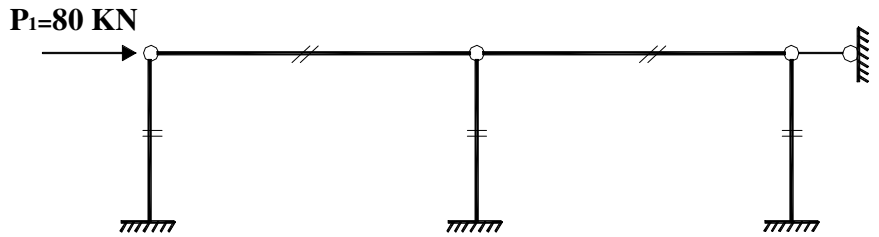


Fig. 8.12.3 $\mathcal{M}_F = 0 \Rightarrow M_F = 0$

Se observă că momentele de încastrare perfectă sunt zero pe toate barele sistemului de bază, rezultând că şi momentele $\mathbf{M_F}$ sunt nule (vezi situația particulară de încărcare).

Acțiunea necunoscutei Z_1=1 pe sistemul de bază. Calculul momentelor m_1 (Fig.8.12.4)

Calculul rigidităților la rotire de bară $\bar{k}$ (Fig.8.12.4)

$$\overline{k_{16}} = -\frac{3 \cdot EI}{6} = -\frac{1}{2} EI = \overline{k_{34}}$$

$$\overline{k_{25}} = -\frac{3 \cdot 2EI}{6} = -EI$$

Calculul rotirilor de bară ψ (Fig.8.12.4)

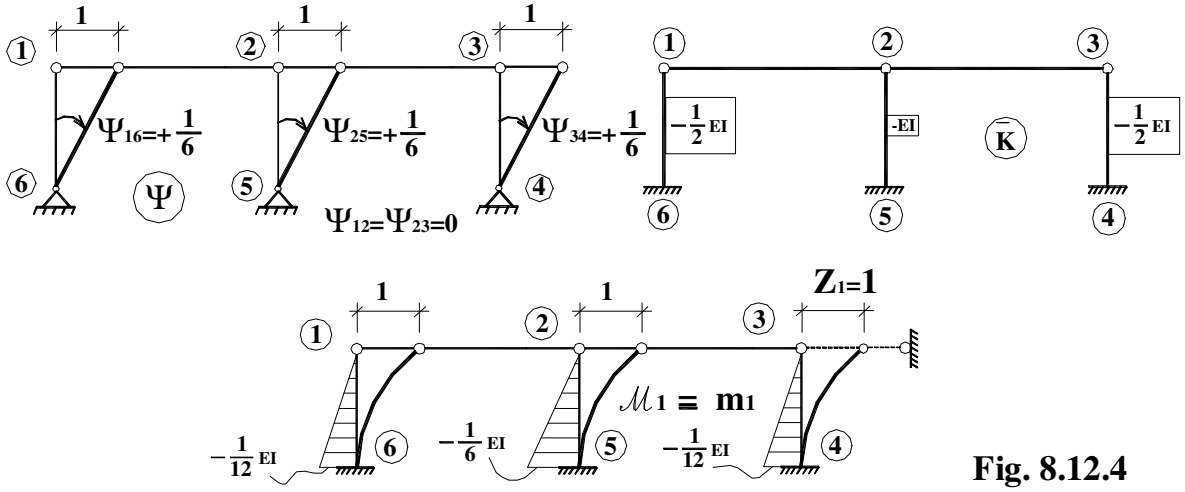


Fig. 8.12.4

Calculul momentelor de incastrare perfectă $\mathcal{M}_1$ (Fig.8.12.4)

$$\mathcal{M}_{16}=\mathcal{M}_{43}= \quad -\overline{k_{16}}\psi_{16}=(-\frac{1}{2}EI)(+\frac{1}{6})=-\frac{1}{12}EI[KNm]$$

$$\mathcal{M}_{25}= \quad \overline{k_{25}}\cdot\psi_{25}=(-EI)(+\frac{1}{6})=-\frac{1}{6}EI[KNm]$$

Deoarece toate nodurile structurii sunt articulații perfecte diagrama $\mathcal{M}_1$ este în echilibru. Rezultă că operația de iterație nu mai trebuie facută deci:

$$\mathbf{m_1=\mathcal{M}_1}$$

Procedeul de operare în două etape. Etapa a-II-a

1. Calculul necunoscutei Z_1 , translație de nod

Se va rezolva ecuația de condiție:

$$R_1=r_{11}\cdot Z_1+R_{1F}=0$$

Calculul reacțiunii r_{11}, forță orizontală (Fig.8.12.5)

Se va utiliza ecuația de echilibru static exprimată pentru rigla cadrului pe care acționează forțele tăietoare corespunzatoare stâlpilor, produse de momentele $\mathbf{m_1}$.

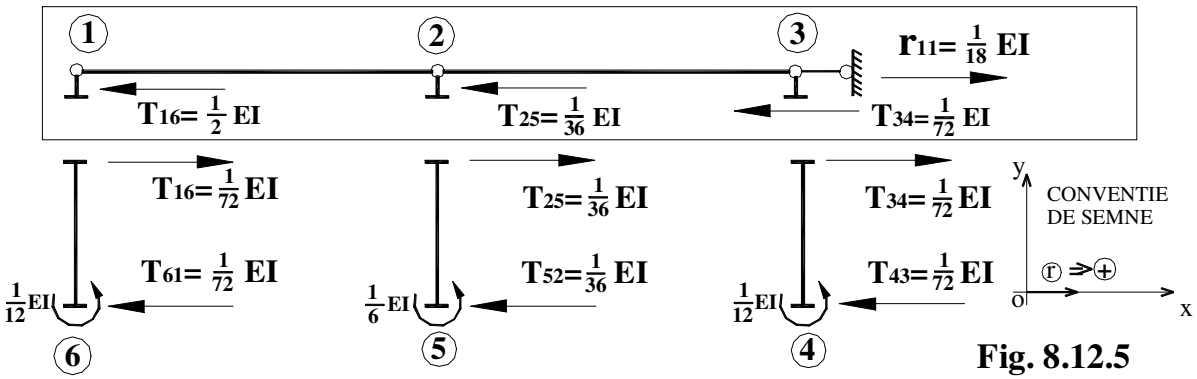


Fig. 8.12.5

$$\sum_{rigla}X_i=0\Rightarrow r_{11}-2\cdot\frac{1}{72}EI-\frac{1}{36}EI=0\Rightarrow r_{11}=\frac{2}{36}EI=\frac{1}{18}EI[KN]$$

Se observă că reacțiunea r_{11} a rezultat în sensul axei **Ox**, deci ea are semnul plus conform convenției de semne.

Calculul reacțiunii R_{1F}, forță orizontală (Fig.8.12.6)

Se utilizează ecuația de echilibru static a riglei cadrului pe care acționează forța exterioară P=80 KN. Deoarece momentele $\mathbf{M_F}$ sunt nule nu există avea forțe tăietoare pe stâlpi.

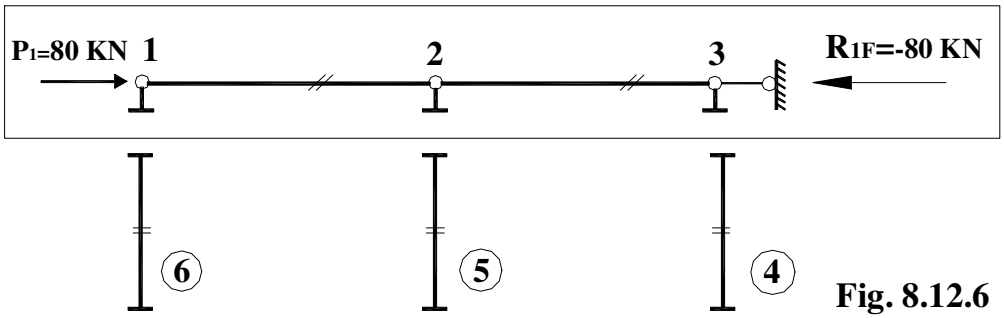


Fig. 8.12.6

$$\sum_{rigla} X_i = 0 \Rightarrow 80 - R_{1F} = 0 \Rightarrow R_{1F} = 80[KN]$$

Se observă că reacțiunea $\mathbf{R_{1F}}$ a rezultat în sensul opus axei **Ox** , deci ea va avea semnul minus.

Rezolvând ecuația de condiție se obține valoarea necunoscutei $\mathbf{Z_1}$:

$$\frac{1}{18} EI \cdot Z_1 - 80 = 0 \Rightarrow Z_1 = 1440 \cdot \frac{1}{EI}[m]$$

2. Calculul şi verificarea diagramei de moment $\mathbf{M^{FINAL}}$ (Fig.8.12.7)

Utilizând simultan principiul superpoziției şi a proporționalității se obține:

$$\begin{cases} M^{FINAL} = M_F + m_1 \cdot Z_1 = m_1 \cdot Z_1 \\ M^{FINAL} = 0 \end{cases}$$

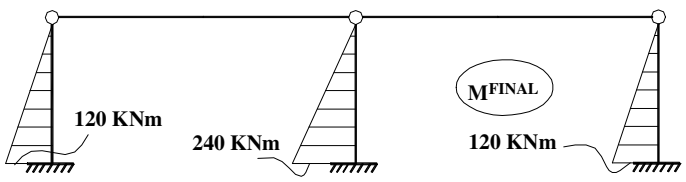


Fig. 8.12.7

Pentru verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$ se va folosi ecuaţia de echilibru a riglei cadrului. (**Fig.8.12.8**).

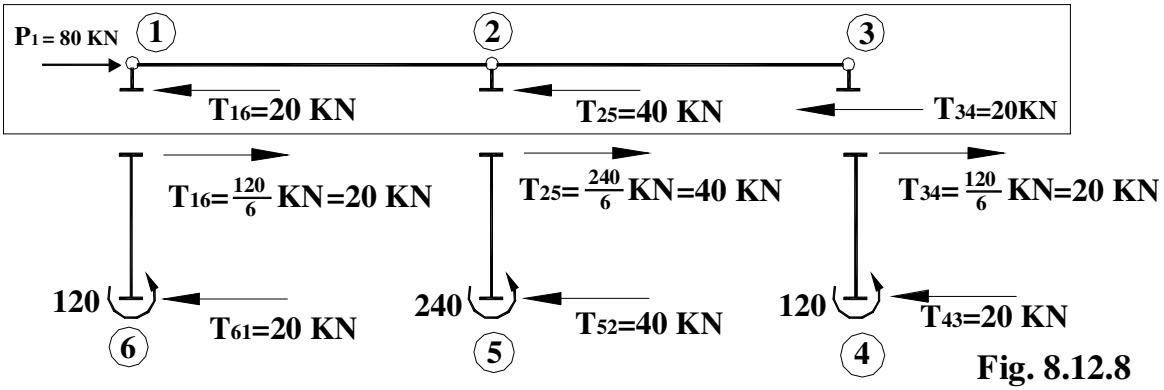


Fig. 8.12.8

$$\sum_{rigla} X_i = 80 - 20 - 40 - 20 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon = 0\ \%}$$

Calculul şi trasarea diagramei T (Fig.8.12.9)

Forţele tăietoare pe stâlpii structurii sunt cunoscute de la verificarea diagramei $\mathbf{M^{FINAL}}$ (**Fig.8.12.8**). Pe barele orizontale momentul încovoietor fiind nul, rezultă că şi forţele tăietoare sunt nule.

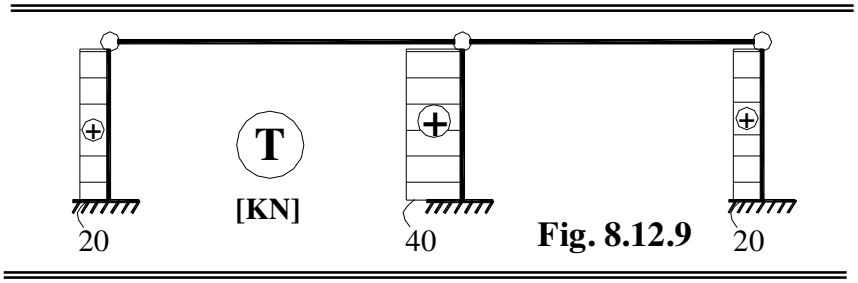


Fig. 8.12.9

Calculul şi trasarea diagramei N (Fig.8.12.10)

Se vor utiliza ecuaţiile de echilibru exprimate pentru fiecare nod al structurii.

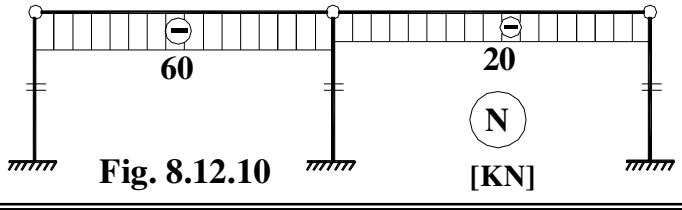


Fig. 8.12.10

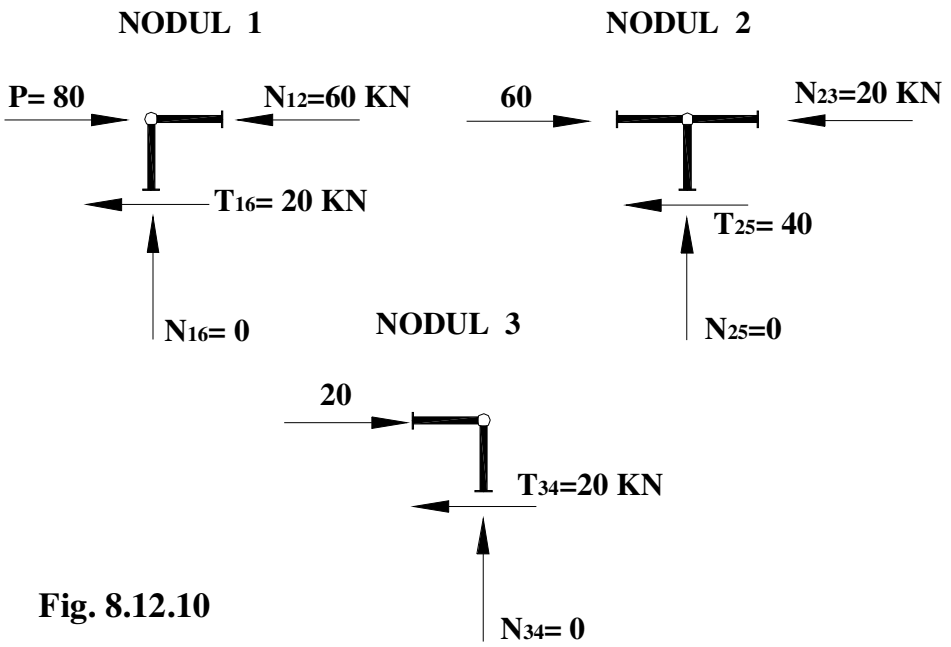


Fig. 8.12.10

Capitolul 9

Se propune rezolvarea cadrului de mai jos utilizând metoda deplasărilor.

- 2,3 $\rightarrow$ cadre cu noduri fixe cu **2** şi **3** noduri
- 3÷4 $\rightarrow$ cadre cu noduri deplasabile cu **1 GLE**

  nu specificăm natura cadrului